

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

А.В. Чернов

ПРАКТИКУМ ПО НЕКОРРЕКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 «Математика»

**Нижний Новгород
2024**

УДК 517.983.54

ББК 22.19

Ч-45

Ч-45 Чернов А.В. ПРАКТИКУМ ПО НЕКОРРЕКТНЫМ ЗАДАЧАМ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2024. – 92 с. – Текст: электронный

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **Д.В. Баландин**

Учебно-методическое пособие посвящено практическим аспектам решения прикладных линейных некорректных задач простейшего типа. В частности, рассматриваются следующие вопросы. 1. Решение систем ЛАУ, заданных с погрешностями, методом регуляризации Тихонова при наличии и при отсутствии информации о совместности точной системы, в том числе с использованием метода обобщенной невязки. 2. Метод квадратных корней для решения систем ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей; факторизация Холецкого. 3. Решение систем ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей и с зависимостью от положительного параметра методом, сочетающим факторизацию Холецкого и сингулярное разложение. 4. Число обусловленности матрицы и оценка погрешности решения систем ЛАУ. 5. Метод регуляризации Тихонова для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. 6. Конечномерная аппроксимация сглаживающего функционала невязки при решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом регуляризации Тихонова. 7. Коэффициентные обратные задачи для уравнения установившихся колебаний упругого стержня. 8. Прикладные примеры сведения обратных задач к интегральному уравнению Фредгольма первого рода (задачи гравиметрии, геологоразведки, ЯМР-томографии, задача о восстановлении размытой фотографии). 9. Метод функций Грина для сведения коэффициентных обратных задач, связанных с ОДУ, к интегральному уравнению Фредгольма первого рода (включая прикладные примеры).

Пособие предназначено для студентов Института информационных технологий, математики и механики, изучающих курс «Некорректные задачи» и обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 «Математика».

УДК 517.983.54

ББК 22.19

А.В.Чернов

Содержание

Введение	4
Глава 1. Решение систем ЛАУ методом регуляризации Тихонова ..	5
1. Наличие информации о совместности точной системы	5
2. Метод сопряженных градиентов для минимизации сглаживающего функционала	8
3. Отсутствие информации о совместности точной системы	15
4. Принцип обобщенной невязки	19
Глава 2. Применение метода регуляризации Тихонова для числен- ного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода	23
5. Конечная аппроксимация сглаживающего функционала невязки	23
6. Уточнение формулы конечной аппроксимации	28
7. Устойчивый метод решения системы ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей	29
8. Ускорение решения системы ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей, зависящей от параметра	32
9. О числе обусловленности матрицы и оценке погрешности решения систем ЛАУ	38
10. Коэффициентные обратные задачи для уравнения колебаний упругого стержня	43
11. Интегральное уравнение Фредгольма I рода для функции двух переменных	52
Глава 3. Сведение обратных задач для ОДУ к интегральному уравнению Фредгольма I рода	62
12. Простейшие задачи	62
13. Метод функций Грина	67
14. Обратные задачи математической физики	76
15. Случай начальных условий	80
Глава 4. Индивидуальные задания	82
16. Задачи	82
17. Задания лабораторных работ	87
Список литературы	90

Введение

Данное учебно-методическое пособие освещает применение метода регуляризации А.Н.Тихонова к решению систем линейных алгебраических уравнений, заданных с погрешностями, и к приближенному решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Кроме того, рассматриваются обратные (в частности, коэффициентные) задачи математической физики, допускающие преобразование к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. И наконец, излагается метод функций Грина для сведения коэффициентных обратных задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Отдельное внимание уделяется прикладным примерам. По каждому разделу приводятся: краткая теоретическая справка и типовые задачи с описанием методики их решения на конкретных примерах. В завершающей главе даются задачи для самостоятельного решения, а также задания для проведения лабораторных работ.

Пособие предназначено для студентов Института информационных технологий, математики и механики, изучающих курс «Некорректные задачи» и обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 «Математика».

Глава 1. Решение систем ЛАУ методом регуляризации Тихонова

1. Наличие информации о совместности точной системы

Пусть $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ – матрица размера $m \times n$, $u \in \mathbb{R}^m$ – заданный вектор-столбец. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (ЛАУ), записанную в матричной форме:

$$Az = u, \quad z = (z_1, \dots, z_n)^* \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Нормальным решением совместной системы (1.1) называется минимальное по модулю среди всех ее решений.

Далее будем предполагать, что нам требуется найти нормальное решение системы

$$A^0 z = u^0, \quad z = (z_1, \dots, z_n)^* \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

однако точные значения матрицы A^0 и правой части u^0 нам неизвестны, а известны лишь их приближения A^h и u^δ с соответствующей точностью:

$$\|A^h - A^0\| \leq h, \quad |u^\delta - u^0| \leq \delta.$$

Обозначим $\eta = (h, \delta)$ и для $\alpha > 0$ определим так называемый *сглаживающий функционал невязки*:

$$M_\eta^\alpha(z) = |A^h z - u^\delta|^2 + \alpha |z|^2, \quad z \in Z = \mathbb{R}^n.$$

Будем предполагать, что нам известна априорная информация о совместности точной системы (1.2). Тогда устойчивый приближенный метод отыскания нормального решения точной системы (1.2) может быть основан на так называемом *методе регуляризации А.Н.Тихонова*, который заключается в минимизации функционала $M_\eta^\alpha(z)$ при определенном согласовании малости (то есть стремления к нулю) величин η и α . Обозначим: z^0 – нормальное решение точной системы (1.2), z_η^α – точка (глобального) минимума функционала $M_\eta^\alpha(z)$ на пространстве \mathbb{R}^n . Справедливы следующие утверждения [16].

Лемма 1.1. *Минимальное значение функционала $M_\eta^\alpha(z)$ на всем пространстве $Z = \mathbb{R}^n$ достигается при любых A^h , u^δ , $\eta = (h, \delta)$, $\alpha > 0$, причем в единственной точке z_η^α . Более того, $|z_\eta^\alpha| \leq \frac{|u^\delta|}{\sqrt{\alpha}}$.*

Теорема 1.1 (о сходимости метода регуляризации А.Н.Тихонова). Пусть $\eta \rightarrow 0$, $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ и выполнено условие согласования: $\frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\eta)} \rightarrow 0$. Тогда $|z_\eta^{\alpha(\eta)} - z^0| \rightarrow 0$.

Задача. Найти с помощью метода регуляризации Тихонова нормальное решение двумерной точной системы $A^0 z = u^0$, если задана возмущенная система $A^\varepsilon z = u^\varepsilon$, при условии, что известна информация о совместности точной системы: $A^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $u^\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\varepsilon - A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; \quad u^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^\varepsilon - u^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $|u^\varepsilon - u^0| = \varepsilon^2 = \delta$;

$$(A^\varepsilon - A^0)z = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |(A^\varepsilon - A^0)z| = \varepsilon |z_2|,$$

$$\frac{|(A^\varepsilon - A^0)z|}{|z|} = \frac{\varepsilon |z_2|}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \leq \varepsilon \quad \forall z \in Z, \quad |z| = 1,$$

откуда

$$\|A^\varepsilon - A^0\| = \sup_{z \in Z: |z|=1} \frac{|(A^\varepsilon - A^0)z|}{|z|} = \varepsilon = h.$$

Таким образом, условие согласования принимает вид:

$$\frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\eta)} = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^4}{\alpha(\varepsilon)} \rightarrow 0 \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha(\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заметим, что

$$A^\varepsilon z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ \varepsilon z_2 \end{pmatrix}.$$

Запишем сглаживающий функционал невязки:

$$M_\varepsilon^\alpha(z) = |A^\varepsilon z - u^\varepsilon|^2 + \alpha |z|^2 = (z_1 + z_2 - 2)^2 + (\varepsilon z_2 - \varepsilon^2)^2 + \alpha(z_1^2 + z_2^2).$$

Решая задачу $M_\varepsilon^\alpha(z) \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^2}$, используем необходимое условие оптимальности:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} M_\varepsilon^\alpha(z) = 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда

$$\begin{cases} (z_1 + z_2 - 2) + \alpha z_1 = 0, \\ (z_1 + z_2 - 2) + \varepsilon(\varepsilon z_2 - \varepsilon^2) + \alpha z_2 = 0, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} (1 + \alpha)z_1 + z_2 = 2, \\ z_1 + (1 + \varepsilon^2 + \alpha)z_2 = 2 + \varepsilon^3. \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1 + \alpha) & 1 \\ 1 & (1 + \varepsilon^2 + \alpha) \end{vmatrix} = 2\alpha + \alpha^2 + \alpha\varepsilon^2 + \varepsilon^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ (2 + \varepsilon^3) & (1 + \varepsilon^2 + \alpha) \end{vmatrix} = 2\alpha + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (1 + \alpha) & 2 \\ 1 & (2 + \varepsilon^3) \end{vmatrix} = 2\alpha + \alpha\varepsilon^3 + \varepsilon^3.$$

Используя условие согласования, получаем:

$$(z_\varepsilon^\alpha)_1 = \frac{2 + 2(\varepsilon^2/\alpha) - (\varepsilon^3/\alpha)}{2 + \alpha + \varepsilon^2 + (\varepsilon^2/\alpha)} \rightarrow \frac{2}{2} = 1,$$

$$(z_\varepsilon^\alpha)_2 = \frac{2 + \varepsilon^3 + (\varepsilon^3/\alpha)}{2 + \alpha + \varepsilon^2 + (\varepsilon^2/\alpha)} \rightarrow \frac{2}{2} = 1.$$

Согласно теореме 1.1 заключаем: $z^0 = (1, 1)^*$.

Проверка. Найдем нормальное решение точной системы:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Множество всех решений имеет вид: $\{z(t) : t \in \mathbb{R}\}$, где $z(t) = (2 - t, t)^*$.

Нормальное решение определяем как решение задачи:

$$|z(t)|^2 = t^2 + (2 - t)^2 = 2t^2 - 4t + 2 \rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}}.$$

Точка минимума находится из условия: $4t - 4 = 0$, то есть $t = 1$. Следовательно, $z^0 = (1, 1)^*$.

2. Метод сопряженных градиентов для минимизации сглаживающего функционала

Пусть A — матрица размера $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец, $\alpha > 0$. Рассмотрим квадратичную функцию $\varphi(x)$ такого же вида, как сглаживающий функционал невязки:

$$\varphi(x) = |Ax - b|^2 + \alpha |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\varphi(x) = (Ax - b, Ax - b) + \alpha (x, x) = (A^*Ax, x) - 2(A^*b, x) + (b, b) + \alpha (x, x),$$

следовательно, градиент

$$\nabla \varphi(x) = 2A^*Ax - 2A^*b + 2\alpha x.$$

Соответственно, матрица вторых производных (матрица Гессе)

$$\nabla^2 \varphi(x) = 2A^*A + 2\alpha E = B.$$

Напомним, что вещественная симметричная матрица B порядка n называется:

неотрицательно определенной ($B \geq 0$), если $(Bx, x) \geq 0$ для любого столбца $x \in \mathbb{R}^n$;

положительно определенной ($B > 0$), если $(Bx, x) > 0$ для любого столбца $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Квадратичная функция

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) + c$$

с положительно определенной матрицей A (такая функция является сильно выпуклой) достигает минимума на всем пространстве \mathbb{R}^n , причем в единственной точке $x = \bar{x}$, определяемой из условия $\nabla f(\bar{x}) = 0$, то есть $A\bar{x} = b$. Для квадратичной функции всякая точка локального минимума является одновременно и точкой глобального минимума.

Возвращаясь к функции $\varphi(x)$, имеем:

$$(Bx, x) = 2(A^*Ax, x) + 2\alpha (x, x) = 2(Ax, Ax) + 2\alpha (x, x) = 2|Ax|^2 + 2\alpha |x|^2 > 0$$

для любого столбца $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Таким образом, квадратичная функция $\varphi(x)$ является сильно выпуклой.

Метод сопряженных направлений для минимизации квадратичных функций с положительно определенной матрицей

Пусть A — положительно определенная симметричная вещественная матрица порядка n , $b \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец, $c \in \mathbb{R}$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) + c, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Как уже было сказано выше, задача минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

имеет, и притом единственное, решение $x = \bar{x}$, определяемое из условия

$$A\bar{x} = b. \quad (2.2)$$

Определение. Система векторов $\{p_k\}_{k=0}^m \subset \mathbb{R}^n$ называется A -сопряженной, или A -ортогональной, если выполняются условия:

$$(Ap_i, p_j) = 0 \quad \text{для всех } i \neq j; \quad (2.3)$$

$$(Ap_i, p_i) \neq 0 \quad \text{для всех } i = \overline{0, m}. \quad (2.4)$$

Замечание. Это определение дается для случая произвольной симметричной вещественной матрицы A . Если же матрица $A > 0$ (как мы это изначально предположили), то условие (2.4) выполняется автоматически: $(Ap_i, p_i) > 0$ для всякого ненулевого вектора p_i .

Лемма 2.1. Всякая A -сопряженная система линейно независима.

Доказательство. Предположим, что векторы p_0, \dots, p_m линейно зависимы. Тогда по крайней мере один из них выражается в виде линейной комбинации остальных. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что это вектор p_0 :

$$p_0 = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k.$$

Тогда, согласно условию (2.3), получаем:

$$(Ap_0, p_0) = \sum_{k=1}^m \alpha_k (Ap_k, p_0) = 0,$$

что противоречит условию (2.4). Таким образом, наше предположение неверно. Лемма доказана.

В силу леммы 2.1, A -сопряженная система может состоять не более, чем из n векторов. Предположим, система p_0, \dots, p_{n-1} является A -сопряженной; \bar{x} — решение системы ЛАУ (2.2) (оно существует и единственно, так как $A > 0$). По лемме 2.1, векторы p_0, \dots, p_{n-1} образуют базис в пространстве \mathbb{R}^n . Следовательно, вектор \bar{x} можно разложить по этому базису:

$$\bar{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k. \quad (2.5)$$

В таком случае $\bar{x} = x_n$, где последовательность $\{x_k\}$ определяется формулой:

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i p_i = x_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1}, \quad x_0 = 0.$$

Найдем коэффициенты в (2.5). Подставляя (2.5) в (2.2), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A p_k = b,$$

откуда для произвольного $i = \overline{0, n-1}$ вытекает:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (A p_k, p_i) = (b, p_i).$$

Пользуясь условием (2.3), заключаем:

$$\alpha_i (A p_i, p_i) = (b, p_i).$$

И в силу условия (2.4),

$$\alpha_i = \frac{(b, p_i)}{(A p_i, p_i)}.$$

Таким образом, получили метод решения системы (2.2), а следовательно, и задачи (2.1):

$$x_0 = 0, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad \alpha_k = \frac{(b, p_k)}{(A p_k, p_k)}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Здесь начальное приближение $x_0 = 0$. Но можно его выбрать и произвольным. Тогда раскладывая аналогичным образом вектор $\bar{x} - x_0$ по базису в виде A -сопряженной системы, получим:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad \alpha_k = \frac{(b - A x_0, p_k)}{(A p_k, p_k)}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (2.6)$$

Метод, определяемый этими итерационными формулами, называется *методом сопряженных направлений*. Метод конечный, сходится за n шагов.

Задача. Решить методом сопряженных направлений, взяв начальную точку $x_0 = (1, 1)^*$ и начальное направление $p_0 = (2, 1)^*$: $f(x) = 2(x^1)^2 + (x^2)^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2}$.

Решение. Функция имеет квадратичный вид с матрицей A (см. далее) при $b = 0$, $c = 0$. A -сопряженная система в \mathbb{R}^2 состоит не более, чем из двух векторов. Найдем вектор p_1 , A -сопряженный с вектором p_0 , то есть такой, что

$$(Ap_0, p_1) = 0.$$

Пусть $p_1 = (a; b)^*$.

$$A = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad Ap_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$0 = (Ap_0, p_1) = 8a + 2b = 2(4a + b).$$

Таким образом, можно взять, например, $a = 1$, $b = -4$, то есть $p_1 = (1; -4)^*$.
Имеем:

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0,$$

где согласно формуле (2.6)

$$\alpha_0 = -\frac{(Ax_0, p_0)}{(Ap_0, p_0)}.$$

Имеем:

$$Ax_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(Ax_0, p_0) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10; \quad (Ap_0, p_0) = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 18.$$

Таким образом, $\alpha_0 = -\frac{10}{18} = -\frac{5}{9}$. Тогда

$$x_1 = (1 + 2\alpha_0; 1 + \alpha_0)^* = \left(1 - \frac{10}{9}; 1 - \frac{5}{9}\right)^* = \left(-\frac{1}{9}; \frac{4}{9}\right)^*.$$

Аналогично,

$$\alpha_1 = -\frac{(Ax_1, p_1)}{(Ap_1, p_1)}.$$

Имеем:

$$Ap_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$(Ax_0, p_1) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -4; (Ap_1, p_1) = 4 \cdot 1 + (-8) \cdot (-4) = 36.$$

Таким образом, $\alpha_1 = -\frac{4}{36} = -\frac{1}{9}$. Тогда

$$x_2 = \left(-\frac{1}{9} + \alpha_1; \frac{4}{9} - 4\alpha_1 \right)^* = (0; 0)^*.$$

Поскольку метод сходится за $n = 2$ итерации, то заключаем, что $\bar{x} = (0; 0)^*$ — искомое решение.

Проверка. Действительно, точка минимума \bar{x} определяется как решение системы (2.2):

$$4x^1 = 0, 2x^2 = 0,$$

то есть $\bar{x} = (0; 0)^*$.

Метод сопряженных градиентов для минимизации квадратичных функций с положительно определенной матрицей

Как нетрудно было заметить, при реализации метода сопряженных направлений для построения очередной точки x_{k+1} векторы p_{k+1}, \dots, p_{n-1} не требуются, то есть систему $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ не обязательно знать всю сразу. Главный вопрос здесь состоит в том, как именно находить эти векторы. В соответствии с этим, существуют различные варианты метода сопряженных направлений, которые как раз и отличаются друг от друга способом построения A -сопряженной системы. Наиболее популярным из них является метод сопряженных градиентов. В нем последовательность $\{p_k\}$ строится следующим образом:

$$p_0 = -\nabla f(x_0) = b - Ax_0, \quad p_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k p_k = b - Ax_{k+1} + \beta_k p_k, \quad (2.7)$$

где коэффициент β_k находится из условия A -сопряженности:

$$(p_{k+1}, Ap_k) = (Ap_{k+1}, p_k) = 0.$$

Иначе говоря,

$$0 = (-\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k p_k, Ap_k) = -(\nabla f(x_{k+1}), Ap_k) + \beta_k (Ap_k, p_k),$$

откуда

$$\beta_k = \frac{(\nabla f(x_{k+1}), Ap_k)}{(Ap_k, p_k)} = \frac{(Ax_{k+1} - b, Ap_k)}{(Ap_k, p_k)}. \quad (2.8)$$

Как показано в [17, глава 5, §3, (3.16)], справедливо равенство:

$$(\nabla f(x_k), p_k) = -|\nabla f(x_k)|^2.$$

Отсюда видно, что вектор p_k может стать нулевым лишь в том случае, когда $\nabla f(x_k) = 0$, то есть текущая точка x_k является искомым решением. В этом случае вычисления следует прекратить. В противном случае вектор p_k является направлением убывания функции $f(x)$ в точке x_k .

Задача. Решить методом сопряженных градиентов, взяв начальную точку $x_0 = (1, 1)^*$: $f(x) = 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - x^1 x^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2}$.

Решение. Функция имеет квадратичный вид с матрицей

$$A = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

при $b = 0$, $c = 0$. Градиент

$$\nabla f(x) = Ax - b = (4x^1 - x^2; -x^1 + 2x^2)^*.$$

Соответственно, начальное направление

$$p_0 = -\nabla f(x_0) = -(4 - 1; 2 - 1)^* = -(3; 1)^*.$$

Имеем:

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0,$$

где согласно формуле (2.6)

$$\alpha_0 = -\frac{(Ax_0, p_0)}{(Ap_0, p_0)}.$$

Имеем:

$$Ax_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$Ap_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(Ax_0, p_0) = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = -10, \quad (Ap_0, p_0) = (-11) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = 32.$$

Соответственно, $\alpha_0 = -\frac{-10}{32} = \frac{5}{16}$. Тогда

$$x_1 = \left(1 - \frac{15}{16}; 1 - \frac{5}{16}\right)^* = \left(\frac{1}{16}; \frac{11}{16}\right)^*.$$

Согласно формуле (2.8),

$$\beta_0 = \frac{(Ax_1 - b, Ap_0)}{(Ap_0, p_0)}.$$

Имеем:

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/16 \\ 11/16 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{7}{16} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$(Ax_1 - b, Ap_0) = (Ax_1, Ap_0) = \frac{7}{16}(-1 \cdot (-11) + 3 \cdot 1) = \frac{49}{8}.$$

Таким образом, $\beta_0 = \frac{49/8}{32} = \frac{49}{16^2}$. При этом

$$\nabla f(x_1) = \frac{1}{16}(4 - 11; -1 + 22)^* = \frac{1}{16}(-7; 21)^* = \frac{-7}{16}(1; -3)^*.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} p_1 &= -\nabla f(x_1) + \beta_0 p_0 = \left(\frac{7}{16} - \frac{147}{16^2}; -\frac{21}{16} - \frac{49}{16^2}\right)^* = \\ &= \frac{1}{16^2}(-35; -385)^* = -\frac{35}{16^2}(1; 11)^*. \end{aligned}$$

Имеем:

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1,$$

где согласно формуле (2.6)

$$\alpha_1 = -\frac{(Ax_0, p_1)}{(Ap_1, p_1)}.$$

Имеем:

$$Ap_1 = -\frac{35}{16^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = -\frac{35}{16^2} \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 49}{16^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$(Ax_0, p_1) = -\frac{35}{16^2}(3 \cdot 1 + 1 \cdot 11) = -\frac{490}{16^2},$$

$$(Ap_1, p_1) = -\frac{5 \cdot 49}{16^2} \frac{35}{16^2} (1 \cdot 1 - 3 \cdot 11) = \frac{5^2 7^3}{8 \cdot 16^2}.$$

Соответственно,

$$\alpha_1 = \frac{490/16^2}{5^2 7^3 / (8 \cdot 16^2)} = \frac{80}{25 \cdot 7} = \frac{16}{35}.$$

Таким образом,

$$x_2 = \left(\frac{1}{16}; \frac{11}{16} \right)^* - \frac{16}{35} \frac{35}{16^2} (1; 11)^* = \frac{1}{16} (1 - 1; 11 - 11)^* = (0; 0)^*.$$

Проверка. Действительно, точка минимума \bar{x} определяется как решение системы (2.2):

$$4x^1 - x^2 = 0, \quad -x^1 + 2x^2 = 0,$$

то есть $\bar{x} = (0; 0)^*$.

3. Отсутствие информации о совместности точной системы

Рассмотрим опять систему (1.1), вне зависимости от того, является ли она совместной или нет. Всякий вектор $\bar{z} \in Z = \mathbb{R}^n$ такой, что

$$|A\bar{z} - u| = \min_{z \in Z} |Az - u|,$$

называется *псевдорешением* системы (1.1). Минимальное по модулю псевдорешение называется *нормальным решением* системы (1.1). В случае совместности системы это понятие совпадает с понятием нормального решения, определенным в § 1. Но в отличие от § 1, нормальное решение, как мы его определили здесь, существует всегда.

Система вида

$$A^*Az = A^*u, \quad z \in Z, \quad (3.1)$$

называется *нормальной* по отношению к системе (1.1). Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.1. *Нормальные решения систем (1.1) и (3.1) совпадают.*

Лемма 3.2. *Система (3.1) всегда имеет классическое решение, то есть заведомо совместна. Более того, нормальное решение системы (3.1) является ее классическим решением.*

Таким образом, поиск нормального решения системы (1.1) можно заменить поиском классического решения заведомо совместной системы (3.1). А для системы (3.1) можно использовать, в частности, метод регуляризации Тихонова.

Далее опять будем предполагать, что нам требуется найти нормальное решение точной системы (1.2) однако точные значения матрицы A^0 и правой части u^0 нам неизвестны, а известны лишь их приближения A^h и u^δ с соответствующей точностью. Положим

$$B^h = (A^h)^* A^h, \quad v^{h,\delta} = (A^h)^* u^\delta.$$

Для $\eta = (h, \delta)$, $\alpha > 0$ сглаживающий функционал невязки определяется по соответствующей нормальной системе:

$$M_\eta^\alpha(z) = |B^h z - v^{h,\delta}|^2 + \alpha |z|^2, \quad z \in Z = \mathbb{R}^n.$$

Условие согласования, записанное для нормальной системы, оказывается равносильным аналогичному условию для исходной системы:

$$\frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\eta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\eta) \rightarrow 0, \quad \eta = (h, \delta) \rightarrow 0.$$

Задача. Найти с помощью метода регуляризации Тихонова нормальное решение двумерной точной системы $A^0 z = u^0$, если задана возмущенная система $A^\varepsilon z = u^\varepsilon$, при условии отсутствия информации о совместности точной системы:

$$A^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad u^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\varepsilon - A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; \quad u^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^\varepsilon - u^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $|u^\varepsilon - u^0| = \varepsilon^2 = \delta$;

$$(A^\varepsilon - A^0)z = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |(A^\varepsilon - A^0)z| = \varepsilon |z_2|,$$

$$\frac{|(A^\varepsilon - A^0)z|}{|z|} = \frac{\varepsilon |z_2|}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \leq \varepsilon \quad \forall z \in Z, \quad |z| = 1,$$

откуда

$$\|A^\varepsilon - A^0\| = \sup_{z \in Z: |z|=1} \frac{|(A^\varepsilon - A^0)z|}{|z|} = \varepsilon = h.$$

Таким образом, условие согласования принимает вид:

$$\frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\eta)} = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^4}{\alpha(\varepsilon)} \rightarrow 0 \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha(\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заметим, что

$$B^\varepsilon = (A^\varepsilon)^* A^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$B^\varepsilon z = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 + (1 + \varepsilon^2)z_2 \end{pmatrix}, \quad v^\varepsilon = (A^\varepsilon)^* u^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^3 \end{pmatrix}.$$

Запишем сглаживающий функционал невязки:

$$M_\varepsilon^\alpha(z) = |B^\varepsilon z - v^\varepsilon|^2 + \alpha |z|^2 = (z_1 + z_2 - 1)^2 + (z_1 + (1 + \varepsilon^2)z_2 - 1 - \varepsilon - \varepsilon^3)^2 + \alpha(z_1^2 + z_2^2).$$

Решая задачу $M_\varepsilon^\alpha(z) \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^2}$, используем необходимое условие оптимальности:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} M_\varepsilon^\alpha(z) = 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда

$$\begin{cases} (z_1 + z_2 - 1) + (z_1 + (1 + \varepsilon^2)z_2 - 1 - \varepsilon - \varepsilon^3) + \alpha z_1 = 0, \\ (z_1 + z_2 - 1) + (1 + \varepsilon^2)(z_1 + (1 + \varepsilon^2)z_2 - 1 - \varepsilon - \varepsilon^3) + \alpha z_2 = 0, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} (2 + \alpha)z_1 + (2 + \varepsilon^2)z_2 = 2 + \varepsilon + \varepsilon^3, \\ (2 + \varepsilon^2)z_1 + (1 + (1 + \varepsilon^2)^2 + \alpha)z_2 = 1 + (1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon + \varepsilon^3). \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2 + \alpha) & (2 + \varepsilon^2) \\ (2 + \varepsilon^2) & (1 + (1 + \varepsilon^2)^2 + \alpha) \end{vmatrix} = 4\alpha + \alpha^2 + 2\varepsilon^4 + 2\alpha\varepsilon^2 + (\alpha - 1)\varepsilon^4,$$

или $\Delta = 4\alpha + \alpha^2 + o(\varepsilon^2)$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (2 + \varepsilon + \varepsilon^3) & (2 + \varepsilon^2) \\ (1 + (1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon + \varepsilon^3)) & (1 + (1 + \varepsilon^2)^2 + \alpha) \end{vmatrix} = 2\alpha + \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (2 + \alpha) & (2 + \varepsilon + \varepsilon^3) \\ (2 + \varepsilon^2) & (1 + (1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon + \varepsilon^3)) \end{vmatrix} = 2\alpha + \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2).$$

Используя условие согласования, получаем:

$$(z_\varepsilon^\alpha)_1 = \frac{2 + \varepsilon + [O(\varepsilon^2)/\alpha]}{4 + \alpha + [o(\varepsilon^2)/\alpha]} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$(z_\varepsilon^\alpha)_2 = \frac{2 + \varepsilon + [O(\varepsilon^2)/\alpha]}{4 + \alpha + [o(\varepsilon^2)/\alpha]} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $z^0 = (1/2, 1/2)^*$.

Проверка. Найдем нормальное решение точной системы:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1, \\ 0 = 1. \end{cases}$$

Каждое псевдорешение определяется как точка минимума функции

$$\varphi(z) = (z_1 + z_2 - 1)^2 + (0 - 1)^2,$$

которая, в свою очередь, определяется из условия:

$$\nabla\varphi(z) = 2(z_1 + z_2 - 1, z_1 + z_2 - 1) = (0, 0).$$

Поэтому множество всех псевдорешений имеет вид $\{z(t) : t \in \mathbb{R}\}$, где функция $z(t) = (t, 1 - t)^*$. Нормальное решение определяем как решение задачи:

$$|z(t)|^2 = t^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 - 2t + 1 \rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}}.$$

Точка минимума находится из условия: $4t - 2 = 0$, то есть $t = 1/2$. Следовательно, $z^0 = (1/2, 1/2)^*$.

Задача. Найти нормальное решение системы $Az = u$ двумя способами: 1) путем минимизации невязки исходной системы; 2) как минимальное по модулю классическое решение нормальной системы $A^*Az = A^*u$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) См. проверку в предыдущей задаче. 2) Имеем:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^*u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормальная система:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1, \\ z_1 + z_2 = 1. \end{cases}$$

Множество всех решений нормальной системы: $\{z(t) : t \in \mathbb{R}\}$, где функция $z(t) = (t, 1 - t)^*$. Нормальное решение определяем как решение задачи:

$$|z(t)|^2 = t^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 - 2t + 1 \rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}}.$$

Точка минимума находится из условия: $4t - 2 = 0$, то есть $t = 1/2$. Следовательно, $z^0 = (1/2, 1/2)^*$.

4. Принцип обобщенной невязки

Классический метод регуляризации Тихонова явился первым в истории регуляризирующим алгоритмом. Однако он оказался малоприменимым для решения различных задач, возникающих из практических потребностей. Дело в том, что в таких задачах исходные данные всегда известны приближенно, но ошибка приближения не стремится к нулю. Тогда возникает вопрос: как понимать условие согласования, когда $\eta = (h, \delta) \not\rightarrow 0$? Здесь возникает неопределенность с выбором параметра регуляризации α . Решить этот вопрос позволяет *принцип обобщенной невязки*. Итак, предположим, что известна априорная информация о разрешимости точной системы:

$$A^0 z = u^0. \quad (4.1)$$

Заданы приближения A^h, u^δ :

$$\|A^h - A^0\| \leq h, \quad |u^\delta - u^0| \leq \delta; \quad \eta = (h, \delta).$$

Сглаживающий функционал невязки:

$$M_\eta^\alpha(z) = |A^h z - u^\delta|^2 + \alpha |z|^2;$$

z_η^α — точка минимума функционала $M_\eta^\alpha(z)$ на $Z = \mathbb{R}^n$. Определим *обобщенную невязку*:

$$\rho_\eta(\alpha) = |A^h z_\eta^\alpha - u^\delta|^2 - (\delta + h|z_\eta^\alpha|)^2 - \mu_\eta,$$

где $\mu_\eta = \inf_{z \in Z} |A^h z - u^\delta|^2$ — мера несовместности возмущенной системы

$$A^h z = u^\delta. \quad (4.2)$$

Если система (4.2) имеет решение, то ясно, что $\mu_\eta = 0$. Можно показать [5], что

$$\mu_\eta = \lim_{\alpha \rightarrow +0} |A^h z_\eta^\alpha - u^\delta|^2.$$

Алгоритм. Пусть выполнено условие

$$|u^\delta|^2 > \delta^2 + \mu_\eta. \quad (4.3)$$

Тогда существует корень $\alpha^*(\eta) > 0$ уравнения обобщенной невязки:

$$\rho_\eta(\alpha) = 0, \quad \alpha > 0. \quad (4.4)$$

В этом случае в качестве приближенного решения точной системы (4.1) принимаем $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*(\eta)}$. Если же условие (4.3) не выполнено, то полагаем $z_\eta = 0$.

Доказывается, что $z_\eta \rightarrow z^0$ при $\eta \rightarrow 0$, где z^0 – нормальное решение системы (4.1), см. [20]. Кроме того, устанавливается, что функция $\rho_\eta(\alpha)$ возрастает и непрерывна. Поэтому функция $\rho_\eta^2(\alpha)$ унимодальна и непрерывна. Заметим в связи с этим, что задача решения уравнения (4.4) эквивалентна задаче минимизации

$$\rho_\eta^2(\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha \in [0; \bar{\alpha}], \quad (4.5)$$

при не слишком малом $\bar{\alpha} > 0$ (скажем, на порядок больше, чем $h^2 + \delta^2$). Достаточно, чтобы $\rho_\eta(\bar{\alpha}) > 0$. А для решения задачи (4.5) можно использовать методы минимизации унимодальных функций, в частности, такой эффективный, как метод золотого сечения.

Задача. Записать уравнение обобщенной невязки в рамках задачи об отыскании нормального решения точной системы $A^0 z = u^0$ по возмущенной системе $A^\varepsilon z = u^\varepsilon$, при условии, что известна информация о совместности точной системы: $A^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $u^\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}$. Решить уравнение обобщенной невязки путем минимизации квадрата обобщенной невязки методом золотого сечения при $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$. Выписать для каждого случая соответствующее приближенное решение z_ε точной системы.

Решение. Ранее, в § 1 уже было найдено: $h = \varepsilon$, $\delta = \varepsilon^2$,

$$(z_\varepsilon^\alpha)_1 = \frac{2\alpha + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2}, \quad (z_\varepsilon^\alpha)_2 = \frac{2\alpha + \alpha\varepsilon^3 + \varepsilon^3}{2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2}.$$

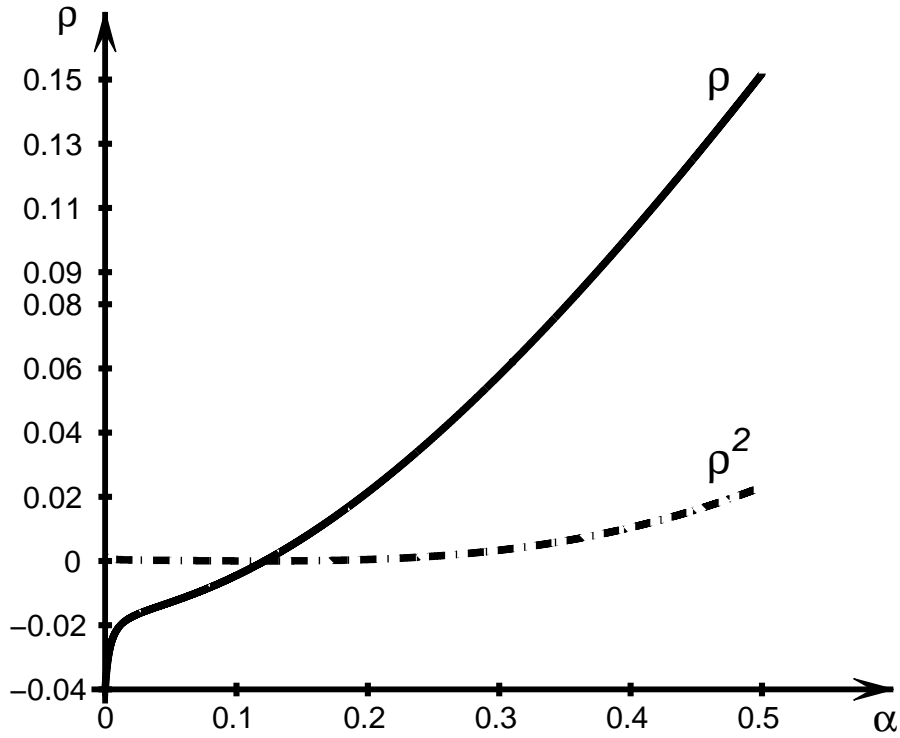


Рис. 4.1. Графики функций $\rho_\varepsilon(\alpha)$ и $\rho_\varepsilon^2(\alpha)$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 A^\varepsilon z_\varepsilon^\alpha &= \frac{1}{2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3 \\ 2\alpha + \alpha\varepsilon^3 + \varepsilon^3 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 4\alpha + 2\varepsilon^2 + \alpha\varepsilon^3 \\ 2\alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon^4 + \varepsilon^4 \end{pmatrix}, \\
 A^\varepsilon z_\varepsilon^\alpha - u^\varepsilon &= \frac{1}{2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2} \cdot \\
 &\cdot \begin{pmatrix} 4\alpha + 2\varepsilon^2 + \alpha\varepsilon^3 - 4\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \\ 2\alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon^4 + \varepsilon^4 - 2\alpha\varepsilon^2 - \alpha^2\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon^4 - \varepsilon^4 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2} \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon^2 \\ 2\alpha\varepsilon - 2\alpha\varepsilon^2 - \alpha^2\varepsilon^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\mu_\varepsilon = \lim_{\alpha \rightarrow +0} |A^\varepsilon z_\varepsilon^\alpha - u^\varepsilon|^2 = 0.$$

Более того, это было очевидно сразу, поскольку $\det A^\varepsilon = \varepsilon \neq 0$, то есть возмущенная система совместна. Теперь можем записать уравнение обобщенной невязки:

$$\rho_\varepsilon(\alpha) = |A^\varepsilon z_\varepsilon^\alpha - u^\varepsilon|^2 - (\varepsilon^2 + \varepsilon |z_\varepsilon^\alpha|)^2 - \mu_\varepsilon = 0,$$

где

$$|A^\varepsilon z_\varepsilon^\alpha - u^\varepsilon|^2 = \frac{(\alpha\varepsilon^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon^2)^2 + (2\alpha\varepsilon - 2\alpha\varepsilon^2 - \alpha^2\varepsilon^2)^2}{(2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2)^2},$$

$$|z_\varepsilon^\alpha| = \frac{\sqrt{(2\alpha + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3)^2 + (2\alpha + \alpha\varepsilon^3 + \varepsilon^3)^2}}{2\alpha + \alpha^2 + (\alpha + 1)\varepsilon^2}.$$

Графики функций $\rho_\varepsilon(\alpha)$ и $\rho_\varepsilon^2(\alpha)$ при $\varepsilon = 0.1$ см. на рис.4.1.

Минимизируя квадрат обобщенной невязки $\rho_\varepsilon^2(\alpha)$ на отрезке $[0; 0.5]$ методом золотого сечения, получаем следующие результаты.

1) $\varepsilon = 0.1$:

$$\alpha^*(\varepsilon) = 0.12132, \rho_\varepsilon(\alpha^*) = -1.7424 \cdot 10^{-12}, z_\varepsilon = (0.97419; 0.90762)^*.$$

2) $\varepsilon = 0.01$:

$$\alpha^*(\varepsilon) = 0.010237, \rho_\varepsilon(\alpha^*) = 1.4228 \cdot 10^{-13}, z_\varepsilon = (0.99967; 0.9901)^*.$$

3) $\varepsilon = 0.001$:

$$\alpha^*(\varepsilon) = 0.0010024, \rho_\varepsilon(\alpha^*) = 2.0676 \cdot 10^{-14}, z_\varepsilon = (1; 0.999)^*.$$

Таким образом, $z_\varepsilon \rightarrow (1; 1)^* = z^0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Напомним (см. § 1), что z^0 — это нормальное решение точной системы в данной задаче.

Глава 2. Применение метода регуляризации Тихонова для численного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода

5. Конечная аппроксимация сглаживающего функционала невязки

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$A^0[z](x) = u^0(x), \quad x \in [c; d], \quad (5.1)$$

с точно заданным оператором интегрального вида

$$A^0[z](x) = \int_a^b K^0(x, s)z(s) ds, \quad x \in [c; d], \quad z \in Z,$$

и правой частью $u^0 \in U$. Будем предполагать, что ядро $K^0(x, s)$ – функция, непрерывная на прямоугольнике $\Pi = [c; d] \times [a; b]$; $Z = L_2[a; b]$, $U = L_2[c; d]$. Ясно, что $A^0 : Z \rightarrow U$ – линейный ограниченный оператор (ЛОО); пространства Z и U гильбертовы.

Предположим теперь, что нам известна априорная информация о том, что уравнение (5.1) имеет единственное решение $z^0 \in V_2^1[a; b]$. Поскольку пространство $V_2^1[a; b]$ тоже является гильбертовым со скалярным произведением

$$(y, z) = \int_a^b \{y(x)z(x) + y'(x)z'(x)\} dx,$$

а A^0 действует из $V_2^1[a; b]$ в U как ЛОО, можем считать, что $Z = V_2^1[a; b]$.

Будем предполагать далее, что вместо точного уравнения (5.1) нам известно лишь его приближение:

$$A^h[z](x) = u^\delta(x), \quad x \in [c; d], \quad (5.2)$$

где

$$A^h[z](x) = \int_a^b K^h(x, s)z(s) ds, \quad x \in [c; d], \quad z \in Z,$$

$$\|K^h - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leq h, \quad \|u^\delta - u^0\|_{L_2[c;d]} \leq \delta, \quad h \in [0; h_0], \quad \delta \in [0; \delta_0].$$

Будем считать, кроме того, что функция $u^\delta(x)$ является непрерывной. Поскольку всякую функцию из $L_2[a; b]$ можно сколь угодно точно в метрике этого пространства приблизить бесконечно дифференцируемой функцией, данное предположение не слишком ограничительно.

Можно использовать абстрактную теорему о сходимости метода регуляризации Тихонова с обобщенной невязкой. На этом пути нам понадобится выписать сглаживающий функционал невязки:

$$\begin{aligned} M_\eta^\alpha(z) &= \|A^h z - u^\delta\|_{L_2[c;d]}^2 + \alpha \|z\|_{V_2^1[a;b]}^2 = \\ &= \int_c^d dx \left\{ \int_a^b K^h(x, s) z(s) ds - u^\delta(x) \right\}^2 + \alpha \left[\int_a^b z^2(s) ds + \int_a^b (z'(s))^2 ds \right], \end{aligned}$$

и найти точку минимума $z_\eta^\alpha \in Z$ этого функционала из условия равенства нулю его производной Фреше (то есть градиента). Соответствующее уравнение называется *уравнением Эйлера*. Однако для того, чтобы это уравнение можно было решить численно, его придется подвергнуть дискретизации. Но можно поступить и по-другому, как мы, собственно, дальше и собираемся сделать. А именно, рассмотрим конечномерную аппроксимацию $\overline{M}_\eta^\alpha(\overline{z})$ функционала $M_\eta^\alpha(z)$; $\overline{M}_\eta^\alpha(\overline{z})$ — это будет сильно выпуклая квадратичная функция конечного числа переменных $\overline{z} = (z_1, \dots, z_n)^*$. Точка минимума такой функции существует, единственна и определяется из условия равенства нулю ее градиента, то есть всех частных производных первого порядка. В итоге получим некоторую систему ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей. Фактически, эту систему можно рассматривать как дискретизацию уравнения Эйлера. А ее уже можно решать численно.

Итак, выберем равномерные сетки:

$$c = x_1 < x_2 < \dots < x_m = d, \quad a = s_1 < s_2 < \dots < s_n = b,$$

где $x_i - x_{i-1} = h_x$, $i = \overline{2, m}$, $s_j - s_{j-1} = h_s$, $j = \overline{2, n}$,

$$h_x = \frac{d - c}{m - 1}, \quad h_s = \frac{b - a}{n - 1}.$$

Используя квадратурную формулу прямоугольников, а также конечно-разностное представление производной, получаем:

$$\overline{M}_\eta^\alpha(\overline{z}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n K_{ij}^h z_j h_s - u_i^\delta \right)^2 h_x + \alpha \left[\sum_{j=1}^n z_j^2 h_s + \sum_{j=2}^n \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{h_s} \right], \quad (5.3)$$

$\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)^* \in \mathbb{R}^n$, $K_{ij}^h = K^h(x_i, s_j)$, $u_i^\delta = u^\delta(x_i)$, $z_j = z(s_j)$,
 $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Здесь $\overline{M}_\eta^\alpha(\bar{z})$ – сильно выпуклая квадратичная функция.
Точка минимума этой функции определяется как решение системы ЛАУ:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} \overline{M}_\eta^\alpha(\bar{z}) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \right.$$

Переписывая эти уравнения подробнее, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_1} \overline{M}_\eta^\alpha = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_j} \overline{M}_\eta^\alpha = 0, \quad j = \overline{2, n-1}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_n} \overline{M}_\eta^\alpha = 0,$$

или (первое и последнее уравнения выписываем отдельно, поскольку у компоненты z_1 нет «соседа слева», а у компоненты z_n нет «соседа справа», что важно с учетом разностного отношения)

$$\begin{aligned} h_x h_s^2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m K_{ik}^h K_{i1}^h \right) z_k + \alpha h_s z_1 - \alpha \frac{z_2 - z_1}{h_s} - \sum_{i=1}^m K_{i1}^h u_i^\delta h_x h_s &= 0, \\ h_x h_s^2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m K_{ik}^h K_{ij}^h \right) z_k + \alpha h_s z_j - \alpha \frac{z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}}{h_s} - \sum_{i=1}^m K_{ij}^h u_i^\delta h_x h_s &= 0, \\ j = \overline{2, n-1}, \\ h_x h_s^2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m K_{ik}^h K_{in}^h \right) z_k + \alpha h_s z_n - \alpha \frac{z_{n-1} - z_n}{h_s} - \sum_{i=1}^m K_{in}^h u_i^\delta h_x h_s &= 0. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$b_{jk} = h_x h_s \sum_{i=1}^m K_{ik}^h K_{ij}^h, \quad f_j = \sum_{i=1}^m K_{ij}^h u_i^\delta h_x, \quad u = (u_1^\delta, \dots, u_m^\delta)^*,$$

и определяя соответствующие матрицы

$$B = (b_{jk})_{j,k=\overline{1,n}} = h_x h_s K^* K, \quad f = (f_1, \dots, f_n)^* = h_x K^* u, \quad K = (K_{ij}^h)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}},$$

после деления каждого уравнения на h_s можем переписать полученную систему в компактной матричной форме:

$$(B + \alpha C) \bar{z} = f, \tag{5.4}$$

где $C = E + \frac{1}{h_s^2}C_1$,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь C_1 — квадратная симметричная трехдиагональная матрица, $C_1 \geq 0$, у которой на главной диагонали стоит вектор вида $(1, 2, \dots, 2, 1)$, на диагоналях выше и ниже нее — вектор вида $(-1, \dots, -1)$, на остальных позициях — нули.

Поясним факт неотрицательной определенности. Если рассмотреть матрицу C_γ , которая отличается от C_1 тем, что элемент $(C_1)_{nn}$ заменяется на число $\gamma \geq 1$, то оказывается, что $\det C_\gamma = \gamma - 1$. Действительно, последовательно прибавляя ко второй строке первую, затем — к третьей строке вторую, и т.д., к n -й строке $(n - 1)$ -ю, получаем определитель треугольной матрицы:

$$\begin{aligned} |C_\gamma| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma - 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Как известно, определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали. Таким образом, $\det C_\gamma = \gamma - 1$. Это, в свою очередь, означает, что все угловые миноры матрицы C_γ , кроме $\det C_\gamma$, равны 1. Поэтому, согласно критерию Сильвестра, $C_\gamma > 0$ для всех $\gamma > 1$. В таком случае, опять же по критерию Сильвестра и по непрерывности главных миноров матрицы C_γ , при $\gamma \rightarrow 1 + 0$ получаем: $C_1 \geq 0$.

Заметим, что матрица B тоже является симметричной и неотрицательно определенной, так как

$$(K^*K)^* = K^*K, \quad (K^*K\xi, \xi) = (K\xi, K\xi) = |K\xi|^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, матрица $(B + \alpha C)$ симметрична и строго положительно определена для любого $\alpha > 0$. Поэтому для решения системы (5.4) можно использовать, например, метод сопряженных градиентов.

Решая систему (5.4), получаем $\bar{z}_\eta^\alpha \in \mathbb{R}^n$ — конечномерную аппроксимацию элемента $z_\eta^\alpha \in Z$. После этого находим параметр регуляризации $\alpha = \alpha^*(\eta)$ как решение конечномерного аналога уравнения обобщенной невязки. Уравнение обобщенной невязки в нашем случае имеет вид:

$$\rho_\eta(\alpha) = \|A^h z_\eta^\alpha - u^\delta\|_{L_2[c;d]}^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|_{V_2^1[a;b]})^2 - \mu_\eta = 0,$$

где $\mu_\eta = \inf_{z \in Z} \|A^h z - u^\delta\|_{L_2[c;d]}^2$. Его конечномерный аналог имеет вид:

$$\bar{\rho}_\eta[\bar{z}_\eta^\alpha] = 0,$$

где

$$\bar{\rho}_\eta[z] = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n K_{ij}^h z_j h_s - u_i^\delta \right]^2 h_x - \left[\delta + h \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j^2 h_s + \sum_{j=2}^n \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{h_s}} \right]^2 - \bar{\mu}_\eta,$$

Использование формулы конечной аппроксимации:
 графики точного $z_0(x)$ и приближенного $z(x)$ решения
 интегрального уравнения Фредгольма I рода

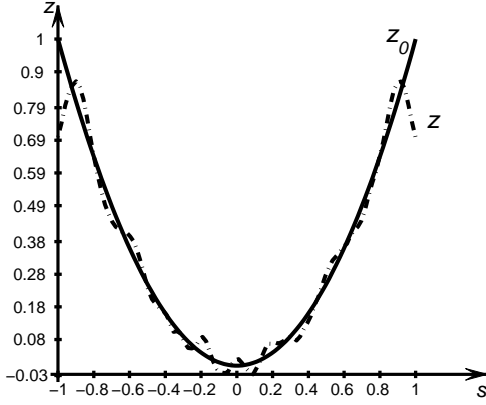


Рис. 6.1. Исходная формула

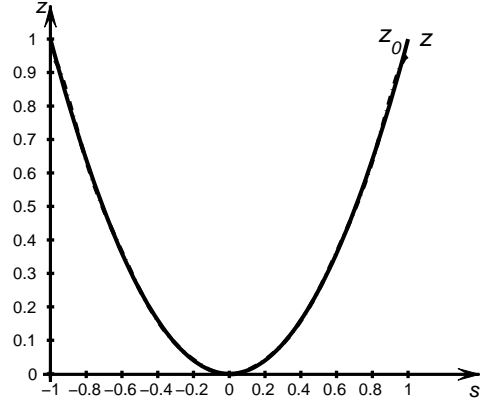


Рис. 6.2. Уточненная формула

$$\bar{\mu}_\eta = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n K_{ij}^h(\bar{z}_\eta^\alpha)_j h_s - u_i^\delta \right]^2 h_x.$$

Наконец, в качестве приближенного решения уравнения (5.1) берем ломаную, определяемую вектором $\bar{z}_\eta^{\alpha^*(\eta)}$ на узлах сетки $\{s_j, j = \overline{1, n}\}$.

6. Уточнение формулы конечной аппроксимации

Аппроксимация сглаживающего функционала невязки по формуле (5.3) на самом деле дает плохие результаты — см. рис. 6.1. Связано это с тем, что количество промежутков у нас равно $(m-1)$ — оно не соответствует количеству слагаемых в сумме, аппроксимирующей интеграл по отрезку $[c; d]$. Аналогичное замечание можно сделать и относительно аппроксимации интеграла по отрезку $[a; b]$. Чтобы исправить ситуацию, нужно в первом и последнем слагаемом добавить множитель $\frac{1}{2}$. В результате приходим к следующей уточненной (модифицированной) формуле:

$$\bar{M}_\eta^\alpha(\bar{z}) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \left[\sum_{j=1}^n \beta_j K_{ij}^h z_j h_s - u_i^\delta \right]^2 h_x + \alpha \left[\sum_{j=1}^n \beta_j z_j^2 h_s + \sum_{j=2}^n \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{h_s} \right],$$

где

$$\gamma_1 = \gamma_m = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \beta_n = \frac{1}{2}, \quad \gamma_i = 1, \quad i = \overline{2, m-1}, \quad \beta_j = 1, \quad j = \overline{2, n-1}.$$

То же самое можно переписать в виде:

$$\overline{M}_\eta^\alpha(\bar{z}) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \tilde{K}_{ij} z_j h_s - \tilde{u}_i \right]^2 h_x + \alpha \left[\sum_{j=1}^n \beta_j z_j^2 h_s + \sum_{j=2}^n \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{h_s} \right], \quad (6.1)$$

где $\tilde{K}_{ij} = \sqrt{\gamma_i} \beta_j K_{ij}^h$, $\tilde{u}_i = \sqrt{\gamma_i} u_i^\delta$. Здесь матрица $\tilde{K} = (\tilde{K}_{ij}^h)_{\substack{i=1, \overline{m} \\ j=1, \overline{n}}}$ отличается от матрицы K тем, что первая и последняя строка матрицы \tilde{K} умножается на $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а первый и последний столбец матрицы \tilde{K} умножается на $\frac{1}{2}$. Столбец \tilde{u} отличается от столбца u^δ тем, что первый и последний элемент умножается на $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда нетрудно понять, что приходим опять к тому же уравнению (5.4), в котором

$$B = h_x h_s \tilde{K}^* \tilde{K}, \quad f = h_x \tilde{K}^* \tilde{u}, \quad C = \frac{1}{h_s^2} C_1 + \tilde{E},$$

где матрица \tilde{E} отличается от единичной матрицы E тем, что первый и последний элементы на главной диагонали умножаются на $\frac{1}{2}$.

Таким образом, если написана программа, использующая формулу (5.3), то ее нетрудно модифицировать под уточненную формулу (6.1). Использование уточненной формулы аппроксимации при решении интегрального уравнения Фредгольма I рода позволяет существенно улучшить результат — см. рис. 6.2.

7. Устойчивый метод решения системы ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей

Практика вычислений показывает, что метод сопряженных градиентов в случае большой размерности приводит к плохим результатам за счет быстрого накопления погрешности. Существенно улучшить результат можно, если каждый раз выбирать начальную точку в методе сопряженных градиентов случайным образом. Этот прием снимает систематическую погрешность при вычислении вектора \bar{z}_η^α . Тем не менее, результат все равно получается далекий от идеального. Поэтому возникает мысль использовать другой, более устойчивый метод для решения системы (5.4). Простейшим таким методом является *метод квадратных корней*. Приведем краткую справку по этому методу; подробнее см., например, в [3, § 2.5, с.72–74].

Пусть требуется решить систему

$$Bz = f \quad (7.1)$$

с симметричной, положительно определенной матрицей B порядка n . Такую матрицу всегда можно представить в виде: $B = T^*T$, где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

— верхняя треугольная матрица, элементы которой вычисляются по формулам:

$$t_{11} = \sqrt{b_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{b_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1), \quad t_{ii} = \sqrt{b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (t_{ki})^2} \quad (i = \overline{2, n}),$$

$$t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}} \left(b_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj} \right) \quad (1 < i < j), \quad t_{ij} = 0 \quad (i > j). \quad (7.2)$$

Поэтому система (7.1) преобразуется к виду:

$$T^*Tz = f, \quad \text{или} \quad \begin{cases} T^*y = f, \\ Tz = y. \end{cases} \quad (7.3)$$

Поскольку матрицы T^* и T треугольные, то нетрудно получить решение системы (7.3):

$$y_1 = \frac{f_1}{t_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{t_{ii}} \left(f_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k \right), \quad i = \overline{2, n};$$

$$z_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad z_i = \frac{1}{t_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik} z_k \right), \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

Задача. Дана система ЛАУ $Ax = b$ с симметричной, положительно определенной матрицей. Решить ее методом квадратных корней.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 & 0 \\ -8 & 13 & -4 & -3 \\ -4 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = (-8, 7, 6, -3)^*.$$

Решение. Найдем разложение Холецкого $A = T^*T$, пользуясь формулами (7.2):

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{16} = 4, \quad t_{12} = \frac{a_{12}}{t_{11}} = -\frac{8}{4} = -2, \\
 t_{13} &= \frac{a_{13}}{t_{11}} = -\frac{4}{4} = -1, \quad t_{14} = \frac{a_{14}}{t_{11}} = 0; \\
 t_{22} &= \sqrt{a_{22} - t_{12}^2} = \sqrt{13 - 4} = 3, \quad t_{23} = \frac{a_{23} - t_{12}t_{13}}{t_{22}} = \frac{-4 - 2}{3} = -2, \\
 t_{24} &= \frac{a_{24} - t_{12}t_{14}}{t_{22}} = \frac{-3 - 0}{3} = -1; \\
 t_{33} &= \sqrt{a_{33} - t_{13}^2 - t_{23}^2} = \sqrt{9 - 1 - 4} = 2, \\
 t_{34} &= \frac{a_{34} - t_{13}t_{14} - t_{23}t_{24}}{t_{33}} = \frac{0 - 0 - 2}{2} = -1; \\
 t_{44} &= \sqrt{a_{44} - t_{14}^2 - t_{24}^2 - t_{34}^2} = \sqrt{3 - 0 - 1 - 1} = 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$T^*T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 & 0 \\ -8 & 13 & -4 & -3 \\ -4 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

то есть $T^*T = A$. Решаем систему $T^*y = b$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Получаем:

$$y_1 = -2 \Rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow y_3 = 6/2 = 3 \Rightarrow y_4 = 1 \Rightarrow y = (-2, 1, 3, 1)^*.$$

Решаем систему $Tx = y$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Получаем:

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 4/2 = 2 \Rightarrow x_2 = 6/3 = 2 \Rightarrow x_1 = 4/4 = 1,$$

то есть $x = (1, 2, 2, 1)^*$.

Проверка.

$$Ax = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 & 0 \\ -8 & 13 & -4 & -3 \\ -4 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = b.$$

8. Ускорение решения системы ЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей, зависящей от параметра

Заметим, что система (5.4) представляется в виде

$$(M^*M + \alpha C)z = f, \quad (8.1)$$

где M – матрица размера $m \times n$, C – трехдиагональная, симметричная, положительно определенная матрица порядка n , $\alpha > 0$ – числовой параметр. Уравнение (8.1) в рамках применения метода регуляризации Тихонова и принципа обобщенной невязки приходится решать многократно при различных значениях параметра $\alpha > 0$. Поэтому имеет смысл попытаться как-то ускорить процесс решения в ходе варьирования параметра α , проведя (один раз!) некоторую предварительную работу по преобразованию системы. Описываемый далее метод предложен в [23].

Прежде всего, методом квадратных корней матрица C представляется в виде: $C = S^*S$, где S – двухдиагональная матрица.

В системе MATLAB матрицу S можно получить, выполнив команду:

>> S=chol(C);

имеется в виду: «получить разложение Холецкого матрицы C ».

Сделаем замену:

$$y = Sz \quad \Rightarrow \quad z = S^{-1}y.$$

Тогда система (8.1) принимает вид:

$$(M^*M + \alpha C)S^{-1}y = f.$$

Домножая полученную систему слева на матрицу $(S^{-1})^*$, получаем:

$$[(MS^{-1})^*(MS^{-1}) + \alpha(S^{-1})^*S^*]y = (S^{-1})^*f.$$

Здесь $(S^{-1})^*S^* = (SS^{-1})^* = E^* = E$. Поэтому, обозначая $D = MS^{-1}$, имеем:

$$(D^*D + \alpha E)y = (S^{-1})^*f.$$

Как известно, с помощью классического алгоритма, см., например, [22, § 1.11], симметричную вещественную матрицу $G = D^*D$ можно привести к диагональному виду. А именно, можно построить ортогональную матрицу U из собственных векторов оператора G такую, что

$$U^*GU = R,$$

где R — диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа

$$r_1, \dots, r_n,$$

оператора G , с учетом их кратности. Поскольку матрица G симметрична, все собственные числа вещественны. А так как матрица G неотрицательно определена, то они еще и неотрицательны: $r_j \geq 0, j = \overline{1, n}$. Поскольку матрица U ортогональна ($U^{-1} = U^*$), то же самое можно записать в виде:

$$G = URU^*.$$

Заметим, что представление вида

$$G = URV^*,$$

где U, V — ортогональные матрицы, R — диагональная матрица, называется *сингулярным разложением матрицы*, см., например, [8, глава 1, § 1].

В системе MATLAB сингулярное разложение можно получить, выполнив команду:

>> [U,R,V]=svd(G);

Пусть $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $r_{ii} = r_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$; $r_{ij} = 0$, $i \neq j$. Сделаем замену: $y = Ux$. Тогда система относительно y переписывается в виде системы относительно x :

$$(GU + \alpha U)x = (S^{-1})^* f.$$

Домножая эту систему на матрицу U^* слева, получаем:

$$(U^*GU + \alpha U^*U)x = U^*(S^{-1})^* f,$$

то есть

$$(R + \alpha E)x = v,$$

где $v = U^*(S^{-1})^* f$. Решение такой системы очевидно:

$$x_i = \frac{v_i}{r_i + \alpha}, \quad i = \overline{1,n}.$$

При этом решение исходной системы получаем по формуле:

$$z = S^{-1}y = S^{-1}Ux \quad \Rightarrow \quad z = Qx, \quad Q = S^{-1}U.$$

Таким образом, если имеем разложение Холецкого: $C = S^*S$ и сингулярное разложение:

$$G = D^*D = URU^*, \quad D = MS^{-1},$$

то решение системы (8.1) получаем по формулам:

$$x_i = \frac{v_i}{r_i + \alpha}, \quad i = \overline{1,n}; \quad v = U^*(S^{-1})^* f = Q^* f; \quad z = Qx, \quad Q = S^{-1}U. \quad (8.2)$$

Соотношение по времени получается примерно в следующих пропорциях. Например, если в случае решения системы (8.1) при варьировании $\alpha > 0$ методом квадратных корней уходит 3 секунды, то при использовании для решения той же системы средств MATLAB (оператор «обратный слэш») – 0.3 секунды. При использовании формулы (8.2) – 0.03 секунды; решение оказывается более устойчивым, чем в остальных случаях.

Задача. Решить систему (8.1) с помощью формул (8.2), если:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1.$$

Решение. Разложение Холецкого:

$$C = S^*S, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$S^*S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем S^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = MS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$G = D^*D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа и нормированные собственные векторы матрицы G :

$$G - \lambda E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 - 2\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 5 - 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 18 - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(G - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (9 - \lambda)[(5 - 2\lambda)^2 - 9] = 0$$

имеет корни:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 1.$$

Собственному числу $\lambda_1 = 9$ соответствует система для собственного вектора:

$$\begin{cases} -13x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - 13x_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Нормированным собственным вектором можем взять: $q_1 = (0, 0, 1)^*$.

Собственному числу $\lambda_2 = 4$ соответствует система для собственного вектора:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0, \\ 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Нормированным собственным вектором можем взять: $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^*$.

Собственному числу $\lambda_3 = 1$ соответствует система для собственного вектора:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 16x_3 = 0. \end{cases}$$

Нормированным собственным вектором можем взять: $q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^*$.

Из нормированных собственных векторов составляем ортогональную матрицу

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, можно написать сразу: $R = \text{diag } r$, $r = (9, 4, 1)$. Но на всякий случай проверим:

$$R = U^*GU = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag } r.$$

Имеем:

$$Q = S^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$v = Q^*f = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8.2) получаем:

$$x_1 = \frac{v_1}{r_1 + \alpha} = \frac{-10}{9 + 1} = -1, \quad x_2 = \frac{v_2}{r_2 + \alpha} = \frac{5\sqrt{2}}{4 + 1} = \sqrt{2},$$

$$x_3 = \frac{v_3}{r_3 + \alpha} = \frac{0}{1 + 1} = 0;$$

$$z = Qx = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Для $B = M^*M$ имеем:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 4 & -3 \\ 4 & 8 & -8 \\ -3 & -8 & 19 \end{pmatrix},$$

$$A = B + \alpha C = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 4 & -3 \\ 4 & 8 & -8 \\ -3 & -8 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -10 \\ -3 & -10 & 24 \end{pmatrix},$$

$$Az = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -10 \\ -3 & -10 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} = f.$$

9. О числе обусловленности матрицы и оценке погрешности решения систем ЛАУ

Рассмотрим систему

$$Ax = b. \tag{9.1}$$

Числом обусловленности матрицы A называется величина

$$\text{cond } A = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| / \inf_{\|y\|=1} \|Ay\|.$$

Точно так же определяется число обусловленности линейного ограниченного оператора $A : X \rightarrow Y$, где X, Y — линейные нормированные пространства. Иногда для числа обусловленности используют обозначение $\nu(A)$. В случае $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ в качестве нормы $\|x\|$ может выступать как евклидов модуль

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

так и любая другая норма (в пространстве \mathbb{R}^n все нормы эквивалентны), в частности,

$$\|x\| = |x|_\infty = \max_{i=1, n} |x_i|.$$

Норму матрицы A , индуцированную модулем $|\cdot|_\infty$, будем обозначать $\|A\|_\infty$, а соответствующее число обусловленности — как $\nu_\infty(A)$.

Далее будем предполагать, что $m = n$ и матрица A обратима (не вырождена), то есть существует обратная матрица A^{-1} . В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf_{\|y\|=1} \|Ay\|} &= \frac{1}{\inf_{\|y\| \neq 0} \|Ay\|/\|y\|} = [Ay = z \Rightarrow y = A^{-1}z] = \\ &= \frac{1}{\inf_{\|z\| \neq 0} \|z\|/\|A^{-1}z\|} = \sup_{\|z\| \neq 0} \frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|} = \|A^{-1}\|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{cond } A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Число обусловленности может рассматриваться как коэффициент роста относительных погрешностей при неточном задании элементов матрицы или правой части. Подробнее об этом см., например, в [3, § 1.5, с.28–34]. А именно, если правая часть получена возмущением b на Δb , а $(x + \Delta x)$ – решение возмущенной системы, то есть

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

x – решение точной системы (9.1), то относительная погрешность подчиняется оценке:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond } A \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Если же матрица A получила возмущение ΔA , и $(x + \Delta x)$ – решение возмущенной системы

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b,$$

то

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond } A \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}, \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \text{cond } A \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Имеет место также следующий более общий результат, см., например, [21, глава 5, § 22.4, с.232–233].

Лемма 9.1. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \rightarrow Y$ – непрерывно обратимый линейный ограниченный оператор, $b \in Y$; $Ax = b$ – данное, $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ – возмущенные операторные уравнения с линейным ограниченным оператором $\tilde{A} : X \rightarrow Y$, $\tilde{b} \in Y$, и относительными уровнями возмущений:

$$\delta_A \geq \frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|}, \quad \delta_b \geq \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}.$$

Тогда, если $\delta_A \cdot \text{cond } A < 1$, то эти уравнения одновременно однозначно разрешимы, причем

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond } A}{1 - \delta_A \text{cond } A} \delta_b + \frac{(\text{cond } A)^2}{1 - \delta_A \text{cond } A} \delta_A.$$

Таким образом, чем больше $\text{cond } A$, тем сильнее сказывается на решении ошибка исходных данных. Если $\text{cond } A$ велико, то система (9.1) называется *плохо обусловленной*.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 1101 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (9.1) имеет единственное решение $x = (1, 1)^*$.

Предположим, правая часть b получает в первой компоненте возмущение 0.01:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 11.01 \\ 1101 \end{pmatrix}.$$

Возмущенная система $A\tilde{x} = \tilde{b}$ имеет единственное решение $\tilde{x} = (11.01, 0)^*$. Как видим, оно довольно сильно отличается от точного решения x .

Вычислим число обусловленности $\nu_\infty(A)$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1001 & -10 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\|A\|_\infty = \sup_{|x|_\infty=1} |Ax|_\infty = \left| A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|_\infty = 1101.$$

Аналогично, $\|A^{-1}\|_\infty = 1011$. Тогда

$$\nu_\infty(A) = 1101 \cdot 1011 = 1113111 > 10^6.$$

Соответственно,

$$|\Delta x|_\infty = \frac{|\Delta x|_\infty}{|x|_\infty} \leq \nu_\infty(A) \frac{|\Delta b|_\infty}{|b|_\infty} = 1113111 \cdot \frac{0.01}{1101} = 10.11.$$

Действительно,

$$\tilde{x} = x + \Delta x = \begin{pmatrix} 11.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

отвечает оценке:

$$|\tilde{x}|_\infty \leq |x|_\infty + |\Delta x|_\infty \leq 1 + 10.11 = 11.11.$$

Этот пример интересен еще тем, что он наглядно демонстрирует следующий факт: малость невязки $r = b - A\tilde{x}$ плохо обусловленной системы еще не говорит о близости приближенного решения \tilde{x} к точному x . Рассмотрим

$$r(\tilde{x}) = b - A\tilde{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1101 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11.01 \\ 1101 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $|r(\tilde{x})|_\infty = 0.01$. Рассмотрим теперь вектор $\tilde{y} = (1, 1.1)^*$, гораздо более близкий к точному решению x . Имеем:

$$r(\tilde{y}) = b - A\tilde{y} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1101 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1201.1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 100.1 \end{pmatrix},$$

следовательно, $|r(\tilde{y})|_\infty = 100.1$. Таким образом, получается парадоксальная ситуация: \tilde{y} существенно ближе к точному решению, чем \tilde{x} , но невязка для него существенно больше.

Задача. Для задачи из § 7 с помощью полученного в ней разложения Холецкого $A = T^*T$ вычислить $\det A$, A^{-1} , $\text{cond } A = \nu_\infty(A)$, и выяснить, какую относительную погрешность может иметь решение возмущенной системы при возмущении одной из компонент правой части на величину 0.01.

Решение. Ранее уже была найдена матрица

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как известно, определитель треугольной матрицы равен произведению всех элементов, расположенных на главной диагонали. Определитель произведения матриц равен произведению определителей. Отсюда сразу получаем:

$$\det A = \det(T^*T) = \det(T^*) \cdot \det(T) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2 = (24)^2 = 576.$$

По известным свойствам матриц,

$$A^{-1} = (T^*T)^{-1} = T^{-1}(T^*)^{-1} = T^{-1}(T^{-1})^*.$$

Вычислим T^{-1} методом элементарных преобразований (над строками):

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} & \frac{11}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{24} & \frac{11}{24} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{24} & \frac{11}{24} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{24} & \frac{11}{24} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $TT^{-1} = T^{-1}T = E$. Соответственно,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= T^{-1}(T^{-1})^* = \left(\frac{1}{24}\right)^2 \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 12 & 0 \\ 11 & 16 & 12 & 24 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{576} \begin{pmatrix} 222 & 264 & 216 & 264 \\ 264 & 384 & 288 & 384 \\ 216 & 288 & 288 & 288 \\ 264 & 384 & 288 & 576 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{1}{576} (264 + 384 + 288 + 576) = 2.625;$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\{16 + 8 + 4, 8 + 13 + 4 + 3, 4 + 4 + 9, 3 + 3\} = 28; \\ \nu_\infty(A) &= 28 \cdot 2.625 = 73.5; \\ x &= (1, 2, 2, 1)^* \Rightarrow |x|_\infty = 2; \\ b &= (-8, 7, 6, -3)^* \Rightarrow |b|_\infty = 8; \\ \frac{|\Delta x|_\infty}{|x|_\infty} &\leq \nu_\infty(A) \frac{|\Delta b|_\infty}{|b|_\infty} = 73.5 \cdot \frac{0.01}{8} = 0.0919. \end{aligned}$$

10. Коэффициентные обратные задачи для уравнения колебаний упругого стержня¹

Рассмотрим закрепленный на левом конце упругий стержень длины ℓ , в котором колебания возбуждаются при помощи силы $p(t)$, приложенной к правому торцу стержня. Уравнение поперечных колебаний стержня в совокупности с начально-краевыми условиями имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)F(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho(x)F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = 0, \quad E(\ell) \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = -p(t). \end{cases}$$

Здесь $x \in [0; \ell]$ – пространственная координата, $t \in [0; T]$ – переменная времени, $E = E(x)$ – модуль упругости стержня, $\rho = \rho(x)$ – плотность стержня, $F = F(x)$ – площадь поперечного сечения стержня, $u(x, t)$ – смещение поперечного слоя стержня, соответствующего координате $x \in [0; \ell]$, в момент времени $t \in [0; T]$. В стационарном режиме имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u = 0,$$

и соответственно, установившиеся колебания стержня описываются следующей краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(E(x)F(x) \frac{du}{dx} \right) + \rho(x)F(x)\omega^2 u = 0, \\ u(0) = 0, \quad E(\ell) \frac{du}{dx}(\ell) = -p. \end{cases} \quad (10.1)$$

Здесь опять $E = E(x)$ – модуль упругости, $\rho = \rho(x)$ – плотность, $F = F(x)$ – площадь поперечного сечения, $\omega > 0$ – волновой параметр, $u(x)$ – смещение поперечного слоя стержня, соответствующего координате $x \in [0; \ell]$.

¹Этот раздел написан на основе [2].

Задача об определении модуля упругости $E(x)$

Будем считать, что $\rho = \text{const}$, $F = \text{const}$. Поскольку на F можно поделить, задача (10.1) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du}{dx} \right) + \rho\omega^2 u = 0, \\ u(0) = 0, \\ E(\ell) \frac{du}{dx}(\ell) = -p. \end{cases} \quad (10.2)$$

Ясно, что решение зависит от параметра $\omega > 0$. Пусть имеется дополнительная информация о решении, которую можно получить, используя *наблюдение* на правом конце:

$$u[\omega](\ell) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1; \omega_2]. \quad (10.3)$$

Как правило, при условии малости колебаний, имеет смысл рассматривать представление вида

$$E(x) = E_0 + E_1(x), \quad \max_{x \in [0; \ell]} \frac{E_1(x)}{E_0} \ll 1, \quad E_0 = \text{const} > 0.$$

Аналитических методов решения задачи (10.2), и тем более, задачи (10.1), с произвольной кусочно гладкой функцией $E(x)$ не существует. Поэтому в механике зачастую используют следующий *метод линеаризации по параметру*. Для малого параметра $\varepsilon > 0$ представим

$$\frac{E(x)}{E_0} = 1 + \varepsilon\eta(x). \quad (10.4)$$

Теперь коэффициентная обратная задача сводится к отысканию для каждого малого $\varepsilon > 0$ функции $\eta(x)$, либо, иначе говоря, функции $z(x) = \varepsilon\eta(x)$. Подставим представление (10.4) в задачу (10.2) и будем искать ее решение в виде

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + o(\varepsilon).$$

Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1 + \varepsilon\eta(x)) \frac{d}{dx} (u_0 + \varepsilon u_1) \right] + k^2 (u_0 + \varepsilon u_1) = 0, \\ (u_0 + \varepsilon u_1) \Big|_{x=0} = 0, \\ (1 + \varepsilon\eta(\ell)) \frac{d}{dx} (u_0 + \varepsilon u_1) \Big|_{x=\ell} = -\frac{p}{E_0} = -p_*. \end{cases} \quad (10.5)$$

Здесь $k^2 = \frac{\rho\omega^2}{E_0}$ — так называемое *волновое число*. Разложим по степеням ε :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{du_0}{dx} + \varepsilon \left(\frac{du_1}{dx} + \eta(x) \frac{du_0}{dx} \right) + \varepsilon^2 \eta(x) \frac{du_1}{dx} \right] + k^2(u_0 + \varepsilon u_1) = 0, \\ u_0(0) + \varepsilon u_1(0) = 0, \\ \frac{du_0}{dx}(\ell) + \varepsilon \left[\frac{du_1}{dx}(\ell) + \eta(\ell) \frac{du_0}{dx}(\ell) \right] + \varepsilon^2 \eta(\ell) \frac{du_1}{dx}(\ell) = -p_*. \end{cases}$$

Отбрасывая члены порядка $o(\varepsilon)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + k^2 u_0 = 0, \\ u_0(0) = 0, \\ \frac{du_0}{dx}(\ell) = -p_*. \end{cases} \quad (10.6)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + k^2 u_1 + \frac{d}{dx} \left(\eta(x) \frac{du_0}{dx} \right) = 0, \\ u_1(0) = 0, \\ \frac{du_1}{dx}(\ell) = -\eta(\ell) \frac{du_0}{dx}(\ell). \end{cases} \quad (10.7)$$

Решения задачи (10.6) имеют вид:

$$u_0 = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

При этом

$$u_0(0) = B = 0, \quad \frac{du_0}{dx} = kA \cos(kx) \Rightarrow kA \cos(k\ell) = -p_* \Rightarrow A = -\frac{p_*}{k \cos(k\ell)}.$$

Таким образом,

$$u_0(x) = -\frac{p_*}{k \cos(k\ell)} \sin(kx). \quad (10.8)$$

Для учета условия (10.3) требуется знать лишь $u(\ell)$, а поскольку $u_0(x)$ уже найдено, достаточно знать лишь $u_1(\ell)$. Для отыскания $u_1(\ell)$ используем следующий прием. Применим к задаче (10.7) конечное интегральное преобразование Фурье. Для этого умножим уравнение на $e^{i\alpha x}$:

$$e^{i\alpha x} u_1'' + k^2 u_1 e^{i\alpha x} + e^{i\alpha x} \frac{d}{dx} (\eta(x) u_0') = 0$$

и проинтегрируем на отрезке $[0; \ell]$. Рассмотрим результат интегрирования по частям для отдельных слагаемых:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} u_1'' dx &= \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} d(u_1') = e^{i\alpha x} u_1' \Big|_0^{\ell} - i\alpha \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} u_1' dx = \\ &= e^{i\alpha x} u_1' \Big|_0^{\ell} - i\alpha \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} d(u_1) = e^{i\alpha x} u_1' \Big|_0^{\ell} - i\alpha \left[e^{i\alpha x} u_1(x) \Big|_0^{\ell} - i\alpha \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} u_1 dx \right] = \\ &= e^{i\alpha \ell} u_1'(\ell) - u_1'(0) - i\alpha (e^{i\alpha \ell} u_1(\ell) - u_1(0)) - \alpha^2 \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} u_1(x) dx; \\ \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} \frac{d}{dx} (\eta(x) u_0') dx &= e^{i\alpha x} \eta(x) u_0'(x) \Big|_0^{\ell} - i\alpha \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} \eta(x) u_0'(x) dx. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая, что

$$u_1(0) = 0, \quad u_0'(x) = -\frac{p_* \cos(kx)}{\cos(k\ell)}, \quad u_1'(\ell) = -\eta(\ell) u_0'(\ell),$$

получаем:

$$(k^2 - \alpha^2) \tilde{u}_1 - u_1'(0) - i\alpha e^{i\alpha \ell} u_1(\ell) - \eta(0) u_0'(0) + i\alpha \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} \eta(x) \frac{p_* \cos(kx)}{\cos(k\ell)} dx = 0,$$

где

$$\tilde{u}_1 = \int_0^{\ell} e^{i\alpha x} u_1(x) dx.$$

Чтобы избавиться от трансформанты \tilde{u}_1 , возьмем $\alpha = k$. Согласно формуле Эйлера,

$$e^{i\alpha x} = e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx).$$

Теперь, выделяя в левой части полученного уравнения мнимую часть и приравнивая ее к нулю, имеем:

$$-k \cos(k\ell) u_1(\ell) + kp_* \int_0^{\ell} \frac{\cos^2(kx)}{\cos(k\ell)} \eta(x) dx = 0,$$

откуда

$$u_1(\ell) = p_* \int_0^\ell \frac{\cos^2(kx)}{\cos^2(k\ell)} \eta(x) dx.$$

При этом, согласно (10.8),

$$u_0(\ell) = -\frac{p_* \sin(k\ell)}{k \cos(k\ell)}.$$

Используя условие (10.3), получаем:

$$u(\ell) = u_0(\ell) + \varepsilon u_1(\ell) = f(\omega).$$

Следовательно,

$$\varepsilon u_1(\ell) = f(\omega) - u_0(\ell),$$

или, для $z(x) = \varepsilon \eta(x)$,

$$\frac{p_*}{\cos^2(k\ell)} \int_0^\ell \cos^2(kx) z(x) dx = f(\omega) + \frac{p_* \sin(k\ell)}{k \cos(k\ell)}.$$

В итоге получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода для определения неизвестной функции $z(x)$:

$$\int_0^\ell \cos^2(kx) z(x) dx = \frac{f(\omega) \cos^2(k\ell)}{p_*} + \frac{\sin(2k\ell)}{2k}, \quad k^2 = \frac{\rho\omega^2}{E_0}. \quad (10.9)$$

Численное решение прямой задачи

При разработке тестов для проверки корректности работы программы, решающей интегральное уравнение (10.9), надо по известному решению обратной задачи $E(x)$, то есть, иначе говоря, $z(x) = \frac{E(x)}{E_0} - 1$, определить наблюдение $f(\omega) = u[\omega](\ell)$. Далее, по заданному наблюдению $f(\omega)$ находим приближенное решение $\tilde{E}(x)$ обратной задачи с помощью приближенного решения $\tilde{z}(x)$ уравнения (10.9), и сравниваем с точным решением $E(x)$. Чтобы по заданному $E(x)$ найти наблюдение $u[\omega](\ell)$, нужно решить прямую задачу (см. (10.2)):

$$\begin{cases} (E(x)u'(x))' + \rho\omega^2 u(x) = 0, & x \in [0; \ell], \\ u(0) = 0, \\ E(\ell)u'(\ell) = -p. \end{cases} \quad (10.10)$$

Эту задачу можно решать по следующей схеме.

Обозначим $E(x)u'(x) = v(x)$. Тогда (10.10) принимает вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} v'(x) = -\rho\omega^2 u(x), \\ u'(x) = \frac{v(x)}{E(x)}, \\ u(0) = 0, v(\ell) = -p. \end{cases} \quad (10.11)$$

Непосредственным интегрированием получаем:

$$v(x) = v(\ell) - \int_x^\ell v'(t) dt = -p + \int_x^\ell \rho\omega^2 u(t) dt;$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt = \int_0^x \frac{v(t)}{E(t)} dt.$$

Подставляя сюда выражение $v(t)$, имеем:

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_0^x \frac{1}{E(\xi)} \int_\xi^\ell u(t) dt d\xi - p \int_0^x \frac{d\xi}{E(\xi)}. \quad (10.12)$$

Преобразуем первое слагаемое с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{E(\xi)} \int_\xi^\ell u(t) dt d\xi &= \left[\begin{array}{l} \bar{u} = \int_\xi^\ell u(t) dt \Rightarrow d\bar{u} = -u(\xi) d\xi \\ \frac{d\xi}{E(\xi)} = d\bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \int_0^\xi \frac{dt}{E(t)} \end{array} \right] = \\ &= \int_\xi^\ell u(t) dt \int_0^\xi \frac{dt}{E(t)} \Big|_0^x + \int_0^x u(\xi) \int_0^\xi \frac{dt}{E(t)} d\xi = \\ &= \int_x^\ell u(t) dt \int_0^x \frac{dt}{E(t)} + \int_0^x u(t) \int_0^t \frac{d\xi}{E(\xi)} dt = \int_0^\ell W(t, x) u(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$W(t, x) = \begin{cases} r(t), & \text{если } t \in [0; x], \\ r(x), & \text{если } t \in [x; \ell], \end{cases} \quad r(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{E(\xi)}, \quad x \in [0; \ell].$$

Теперь уравнение (10.12) переписывается в виде интегрального уравнения Фредгольма II рода:

$$u(x) - \rho\omega^2 \int_0^\ell W(t, x)u(t) dt = -pr(x), \quad x \in [0; \ell]. \quad (10.13)$$

Заменив интеграл в (10.13) квадратурной формулой трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=2}^{N+1} (f(x_{i-1}) + f(x_i)), \quad x_i = a + (i-1)h, \quad i = \overline{1, N+1},$$

получаем систему ЛАУ относительно узловых значений $u_i, i = \overline{1, N+1}$:

$$u_i - \rho\omega^2 \frac{\ell}{2N} \sum_{j=2}^{N+1} (u_{j-1}W_{j-1,i} + u_jW_{j,i}) = b_i, \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (10.14)$$

$$b_i = -pr_i, \quad r_i = r(x_i), \quad u_i = u(x_i), \quad i = \overline{1, N+1}.$$

Очевидно, что

$$W_{j,i} = \begin{cases} r_j, & \text{если } j \leq i, \\ r_i, & \text{если } j > i. \end{cases}$$

Тогда система (10.14) переписывается в матричной форме:

$$Au = b, \quad A = E - \frac{\rho\omega^2\ell}{N} C, \quad (10.15)$$

где C получается из матрицы R домножением первого и $(N+1)$ -го столбца на $\frac{1}{2}$, а матрица R определяется следующим образом:

$$R = \text{diag}(r_1, \dots, r_{N+1}; 0) + \text{diag}(r_1, \dots, r_N; \pm 1) + \\ + \dots + \text{diag}(r_1, r_2; \pm(N-1)) + \text{diag}(r_1; \pm N).$$

Здесь diag означает диагональную квадратную матрицу порядка $(N+1)$, индекс 0 — главную диагональ, 1 — диагональ, расположенную непосредственно выше нее, (-1) — диагональ, расположенную непосредственно ниже главной, и т.д. Перед индексом диагонали перечисляются элементы, которыми она заполняется. Соответственно, $u[\omega](\ell) = u_{N+1}$.

В свою очередь, для тестирования программы, решающей задачу (10.10), можно поступить следующим образом. Задать произвольную функцию $u(x)$,

$u(0) = 0$, и по ней определить $E(x)$ как решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} u'E' + u''E = -\rho\omega^2u(x), & x \in [0; \ell], \\ E(\ell) = -\frac{p}{u'(\ell)}. \end{cases} \quad (10.16)$$

В итоге оказывается, что для полученного таким образом $E(x)$ мы знаем точное решение $u(x)$ задачи (10.10).

Пример. Пусть $u = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, $\rho = \omega = 1$. Тогда

$$u' = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow u'' = -\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Подставляя в уравнение (10.16), имеем:

$$\frac{1}{(x+1)^2} E' - \frac{2}{(x+1)^3} E = -\frac{x}{x+1},$$

или

$$E' - \frac{2E}{x+1} = -x(x+1).$$

Положим $E = \varphi(x)\psi(x)$. Тогда $E' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$, и уравнение преобразуется к виду:

$$\varphi'\psi + \varphi \left[\psi' - \frac{2\psi}{x+1} \right] = -x(x+1).$$

Подберем функцию $\psi(x)$ так, чтобы занулилась квадратная скобка:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{2\psi}{x+1} \Leftrightarrow \int \frac{d\psi}{\psi} = \int \frac{2dx}{x+1},$$

откуда

$$\ln |\psi| = 2\ln |x+1| + C.$$

Стало быть, можно взять $\psi = (x+1)^2$. Тогда функция $\varphi(x)$ определяется из уравнения

$$(x+1)^2\varphi' = -x(x+1) \Leftrightarrow \varphi' = -\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1.$$

Таким образом, общее решение

$$\varphi(x) = \ln(x+1) - x + C \Rightarrow E(x) = (x+1)^2 [\ln(x+1) - x + C].$$

Возьмем $C = 1$. Тогда

$$E(x) = (x+1)^2 [\ln(x+1) - x + 1],$$

и соответственно, при $\ell = 1$:

$$E(\ell) = 4 \ln 2 = -\frac{p}{u'(\ell)} = -\frac{p}{1/4} = -4p.$$

Следовательно, $p = -\ln 2$.

Итак, если $\omega = \rho = \ell = 1$, $p = -\ln 2$,

$$E(x) = (x + 1)^2 [\ln(x + 1) - x + 1],$$

то точное решение задачи (10.16) имеет вид $u(x) = \frac{x}{x + 1}$.

Задача об определении плотности

Пусть $E = \text{const}$, $F = \text{const}$. Тогда прямая задача принимает вид:

$$\begin{cases} E \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho(x)\omega^2 u(x) = 0, & x \in [0; \ell], \\ u(0) = 0, \\ \frac{du}{dx}(\ell) = -\frac{p}{E} = -p_*. \end{cases} \quad (10.17)$$

Обратная задача: найти плотность $\rho(x)$ по наблюдению (10.3) на правом конце.

Задача об определении площади поперечного сечения

Пусть $E = \text{const}$, $\rho = \text{const}$. Тогда прямая задача принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(EF(x) \frac{du}{dx} \right) + \rho F(x)\omega^2 u(x) = 0, & x \in [0; \ell], \\ u(0) = 0, \\ \frac{du}{dx}(\ell) = -\frac{p}{E} = -p_*. \end{cases} \quad (10.18)$$

Обратная задача: найти площадь поперечного сечения $F(x)$ по наблюдению (10.3) на правом конце.

11. Интегральное уравнение Фредгольма I рода для функции двух переменных

$$\int_{a_1}^{b_1} ds \int_{a_2}^{b_2} K(x, y; s, t) z(s, t) dt = u(x, y), \quad (11.1)$$

где $x \in [c_1; d_1]$, $y \in [c_2; d_2]$, ядро $K(x, y; s, t)$ непрерывно на

$$\Pi = [c_1; d_1] \times [c_2; d_2] \times [a_1; b_1] \times [a_2; b_2],$$

$u \in \mathbf{C}([c_1; d_1] \times [c_2; d_2])$, $z \in \mathbf{C}([a_1; b_1] \times [a_2; b_2])$. Такие задачи являются некорректными, см. [18].

На практике известны лишь приближения $K_h(x, y; s, t)$, $u_\delta(x, y)$:

$$|K_h(x, y; s, t) - K(x, y; s, t)| \leq h, \quad \|u_\delta - u\| \leq \delta.$$

Таким образом, на самом деле имеем уравнение:

$$\int_{a_1}^{b_1} ds \int_{a_2}^{b_2} K_h(x, y; s, t) z(s, t) dt = u_\delta(x, y). \quad (11.2)$$

Требуется найти приближения к решению задачи (11.1), устойчивые к возмущению ядра и правой части.

Применение разностного метода регуляризации

Для приближенного решения интегрального уравнения (11.1) заменим интеграл кубатурной формулой и сведем уравнение (11.1) к системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ). Здесь можно применять различные кубатурные формулы (формулы аппроксимации двойного интеграла). Рассмотрим кратный интеграл по прямоугольной области $G = [a; b] \times [c; d]$:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

К внешнему интегралу применим квадратурную формулу [13]

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m a_i \int_c^d f(x_i, y) dy + R,$$

где R – остаток, a_i – квадратурный коэффициент, x_i , $i = \overline{1, m}$, – узлы. Каждое слагаемое в правой части содержит интеграл, который можно вычислить аналогичным образом:

$$\int_c^d f(x_i, y) dy = \sum_{j=1}^n b_j f(x_i, y_j) + R_i,$$

где R_i – остаток, b_j – квадратурный коэффициент, y_j , $j = \overline{1, n}$, – узлы. Тогда

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} f(x_i, y_j) + \bar{R},$$

где

$$c_{ij} = a_i b_j, \quad \bar{R} = R + \sum_{i=1}^m a_i R_i.$$

Здесь узлы x_i , y_j и квадратурные коэффициенты выбираются, исходя из удобства вычислений и точности. При решении интегральных уравнений широко используются формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса. В общем виде

$$\int_{a_1}^{b_1} ds \int_{a_2}^{b_2} K_h(x, y; s, t) z(s, t) dt \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n K_h(x, y; s_i, t_j) z(s_i, t_j) c_{ij},$$

где c_{ij} – кубатурные коэффициенты, $(s_i, t_j) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ – узлы. Далее для простоты будем считать, что количество узлов разбиения по каждому из отрезков одно и то же и равно n , то есть в приведенной выше формуле $m = n$. Область переменных (x, y) тоже разбиваем плотной сеткой узлов (x_p, y_m) . Тогда уравнение (11.2) с точностью до остатка кубатурной формулы заменяем системой уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_h(x_p, y_m; s_i, t_j) z(s_i, t_j) c_{ij} = u_\delta(x_p, y_m), \quad p, m = \overline{1, n}. \quad (11.3)$$

В частности, для кубатурных формул прямоугольников:

$$c_{ij} = h_s h_t, \quad \text{где} \quad h_s = \frac{b_1 - a_1}{n}, \quad h_t = \frac{b_2 - a_2}{n}.$$

Сведем систему (11.3) к системе ЛАУ вида

$$A_h \bar{z} = \bar{u}_\delta.$$

Для этого матрицу $(u_\delta(x_p, y_m))_{p,m=\overline{1,n}}$ нужно развернуть в вектор-столбец, присоединяя к концу первого столбца – второй, к концу второго – третий и т.д. по правилу:

$$\bar{m} = m + (p - 1)n, \quad \text{где } \bar{m} = \overline{1, n^2}.$$

После этого двойную сумму представляем в соответствии с описанным правилом как одинарную, и т.д. Получим систему ЛАУ

$$A_h \bar{z} = \bar{u}_\delta, \tag{11.4}$$

$$A_h = (a_{i\bar{j}}), \quad \bar{u}_\delta = (b_{\bar{m}}), \quad \bar{m} = m + (p - 1)n, \quad \bar{j} = i + (j - 1)n.$$

Система (11.4) будет иметь плохую обусловленность в силу некорректности задачи (11.1). Поэтому из-за погрешностей можно получить решение, которое в узлах сетки сильно отличается от точного. Соответственно, возникает вопрос об устойчивом к малым изменениям исходных данных методе построения решения, приближенного к точному. Здесь можно использовать метод регуляризации Тихонова для отыскания нормального решения. Определим сглаживающий функционал

$$M_\eta^\alpha(\bar{z}) = \|A_h \bar{z} - \bar{u}_\delta\|^2 + \alpha \|\bar{z}\|^2.$$

Регуляризованное решение \bar{z}_η^α , минимизирующее функционал $M_\eta^\alpha(\bar{z})$ при $\eta = (h, \delta)$, удовлетворяет уравнению:

$$A_h^* A_h \bar{z} + \alpha \bar{z} = A_h^* \bar{u}_\delta;$$

$\alpha = \alpha(\eta)$ находится как решение уравнения обобщенной невязки:

$$\rho(\alpha) = 0,$$

$$\rho(\alpha) = \|A_h \bar{z}_\eta^\alpha - \bar{u}_\delta\|^2 - (\delta + h \|\bar{z}_\eta^\alpha\|)^2 - \mu_\eta^2,$$

$$\mu_\eta = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \|A_h \bar{z}_\eta^\alpha - u_\delta\|.$$

Найдя вектор $\bar{z}_\eta = \bar{z}_\eta^{\alpha(\eta)}$, преобразуем его обратно в матрицу приближенного решения в узлах сетки:

$$\bar{Z}_\eta(i, k) = \bar{z}_\eta(i + (k - 1)n), \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Метод регуляризации нулевого порядка для приближенного решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма I рода

Рассмотрим уравнения (11.1), (11.2), предполагая, что ядра непрерывны,

$$u, u_\delta \in L_2([c_1; d_1] \times [c_2; d_2]), \quad z \in L_2([a_1; b_1] \times [a_2; b_2]),$$

$$\|u_\delta - u\|^2 = \int_{c_1}^{d_1} dx \int_{c_2}^{d_2} |u_\delta(x, y) - u(x, y)|^2 dy \leq \delta^2, \quad (11.5)$$

$$\|A_h - A\|^2 = \sup_{z \in L_2, \|z\| \leq 1} \int_{c_1}^{d_1} dx \int_{c_2}^{d_2} dy (A_h[z](x, y) - A[z](x, y))^2 \leq h^2,$$

$$A_h[z](x, y) - A[z](x, y) = \int_{a_1}^{b_1} ds \int_{a_2}^{b_2} (K_h(x, y; s, t) - K(x, y; s, t))z(s, t) dt.$$

Сглаживающий функционал Тихонова:

$$M_\eta^\alpha(z) = \int_{c_1}^{d_1} dx \int_{c_2}^{d_2} \{A_h[z](x, y) - u_\delta(x, y)\}^2 + \alpha \int_{a_1}^{b_1} ds \int_{a_2}^{b_2} z^2(s, t) dt,$$

$$A_h[z](x, y) = \int_{a_1}^{b_1} ds \int_{a_2}^{b_2} K_h(x, y; s, t)z(s, t) dt.$$

При фиксированных $\alpha > 0$, $\eta = (h, \delta)$, среди

$$z \in L_2([a_1; b_1] \times [a_2; b_2])$$

существует единственное z_η^α , доставляющее минимум функционалу $M_\eta^\alpha(z)$, причем z_η^α определяется из уравнения Эйлера:

$$\int_{[a;b]} B(\bar{s}, \bar{t}) z_\eta^\alpha(\bar{t}) d\bar{t} + \alpha z_\eta^\alpha(\bar{s}) = \int_{[c;d]} K_h(\bar{x}; \bar{s}) u_\delta(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (11.6)$$

где

$$[a; b] = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2], \quad [c; d] = [c_1; d_1] \times [c_2; d_2],$$

$$\bar{s} = (s_1, s_2) \in [a; b], \quad \bar{t} = (t_1, t_2) \in [a; b],$$

$$B(\bar{s}, \bar{t}) = \int_{[c;d]} K_h(\bar{x}; \bar{s}) K_h(\bar{x}; \bar{t}) d\bar{x}. \quad (11.7)$$

Приближенное решение определяется как $z_\eta = z_\eta^{\alpha(\eta)}$, где $\alpha = \alpha(\eta)$ – решение уравнения обобщенной невязки:

$$\rho(\alpha) = 0,$$

где

$$\rho(\alpha) = \int_{[c;d]} d\bar{x} \{A_h[z_\eta^\alpha](\bar{x}) - u_\delta(\bar{x})\}^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\|)^2 - \mu_\eta^2 = 0,$$

$$A_h[z_\eta^\alpha](\bar{x}) = \int_{[a;b]} K_h(\bar{x}; \bar{s}) z_\eta^\alpha(\bar{s}) d\bar{s}, \quad \mu_\eta = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|.$$

Дискретизация уравнения Эйлера в рамках регуляризации нулевого порядка

Рассмотрим дискретизацию уравнения (11.6). Будем считать, что $B_h(\bar{s}, \bar{t})$ и правая часть вычисляются достаточно точно (приближенно по кубатурной формуле или аналитически). Тогда, аппроксимируя двойной интеграл кубатурной формулой, получаем:

$$\int_{[a;b]} B_h(\bar{s}, \bar{t}) z(\bar{t}) d\bar{t} = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij} B_h(\bar{s}; t_{1i}, t_{2j}) z(t_{1i}, t_{2j}) + R_{m_1 m_2}.$$

Отбрасывая остаток, получаем приближенное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij} B_h(s_1, s_2; t_{1i}, t_{2j}) z(t_{1i}, t_{2j}) + \alpha z(s_1, s_2) = v_\delta(s_1, s_2),$$

где

$$v_\delta(s_1, s_2) = \int_{[c;d]} K_h(\bar{x}; s_1, s_2) u_\delta(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Здесь (t_{1i}, t_{2j}) – узлы кубатурной формулы. Вводя узлы (s_{1p}, s_{2k}) , получаем матричное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij} B_h(s_{1p}, s_{2k}; t_{1i}, t_{2j}) z(t_{1i}, t_{2j}) + \alpha z(s_{1p}, s_{2k}) = v_\delta(s_{1p}, s_{2k}),$$

где $p = \overline{1, m_1}$, $k = \overline{1, m_2}$, причем $s_{1p} = t_{1p}$, $s_{2k} = t_{2k}$. Разворачивая четырехиндексную матрицу

$$\tilde{B}_h = [B_h(s_{1p}, s_{2k}; t_{1i}, t_{2j}) : p, i = \overline{1, m_1}, k, j = \overline{1, m_2}]$$

в двухиндексную, а матрицы $z(t_{1i}, t_{2j})$, $v_\delta(s_{1p}, s_{2k})$ в векторы-столбцы, получаем систему ЛАУ при $M = m_1 m_2$ неизвестных и матрицей размера $M \times M$. Проанализируем разворачивание правой части $v_\delta(s_{1p}, s_{2k})$ в вектор-столбец. Пусть N — общее число узлов. Используя, в частности, формулу левых прямоугольников, имеем при

$$i, j, p, k = \overline{1, N}, \quad h_s = \frac{b_1 - a_1}{N}, \quad h_t = \frac{b_2 - a_2}{N},$$

$$s_{1p} = t_{1p} = a_1 + (p - 1)h_s, \quad s_{2k} = t_{2k} = a_2 + (k - 1)h_t.$$

Тогда получим матрицу

$$v_\delta(p, k) = v_\delta(s_{1p}, s_{2k}), \quad p, k = \overline{1, N}, \quad M = N^2.$$

С помощью формулы

$$q = (p - 1)N + k, \quad p, k = \overline{1, N},$$

правую часть разворачиваем в вектор

$$F_\delta = (f_\delta(q))_{q=\overline{1, M}},$$

где $f_\delta(q) = v_\delta(p, k)$.

Аналогично, разворачиваем матрицу $(z(t_{1i}, t_{2j}))$ в вектор ξ размерности M :

$$\xi(q) = z(t_{1i}, t_{2j}), \quad q = (i - 1)N + j, \quad q = \overline{1, M}.$$

Проанализируем разворачивание четырехиндексной матрицы \tilde{B}_h в обычную двухиндексную. Для этого надо, чтобы индексы (i, j) соответствовали индексам q вектора ξ . Отсюда получаем матрицу

$$W_h = (w_{qn})_{q, n=\overline{1, M}},$$

где

$$w_{qn} = B_h(s_{1p}, s_{2k}; t_{1i}, t_{2j}) h_s h_t$$

для индексов

$$q = (p - 1)N + k, \quad n = (j - 1)N + i \quad \text{при} \quad i, j, p, k = \overline{1, N}.$$

Получаем систему ЛАУ вида

$$W_h \xi + \alpha \xi = F_\delta. \tag{11.8}$$

Находим $\xi_\eta = \xi_\eta^{\alpha(\eta)}$ – решение (11.8) при $\alpha = \alpha(\eta) > 0$ – корень (дискретного аналога) уравнения обобщенной невязки:

$$\rho(\alpha) = \|W_h \xi_\eta^\alpha - F_\delta\|^2 - (\delta + h \|\xi_\eta^\alpha\|)^2 - \mu_\eta^2,$$

$$\mu_\eta = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^M} \|W_h \xi - F_\delta\|_{\mathbb{R}^M}.$$

Тогда за приближенное решение системы принимаем вектор ξ_η . Этот вектор-столбец высоты $M = N^2$ сворачиваем в матрицу $N \times N$ такую, что

$$z_\eta(t_{1i}, t_{2j}) = \xi_\eta(i + (j - 1)N).$$

Тогда z_η принимается в качестве регуляризованного приближенного решения точной задачи.

Замечание. Для проверки точности работы программы, то есть для оценки погрешности найденного приближенного решения потребуются знание точного (аналитического) нормального решения. Рассмотрим примеры его отыскания.

Пример 1.

$$\int_0^1 ds \int_0^1 (s + t)z(s, t) dt = 1 = u(x, y) \quad \text{при } x, y, s, t \in [0; 1].$$

Здесь $K(x, y, s, t) = s + t$. Найдем $z^0(s, t)$ – нормальное решение как предел

$$z^0 = \lim_{\alpha \rightarrow +0} z_{\eta=0}^\alpha,$$

где z_η^α – решение уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \alpha z(s, t) + \int_0^1 dt_1 \int_0^1 B(s, t; t_1, t_2) z(t_1, t_2) dt_2 = \\ = \int_0^1 dx \int_0^1 K(x, y; s, t) u(x, y) dy = s + t. \end{aligned}$$

Здесь $K(x, y; s, t) = s + t$, $u(x, y) = 1$,

$$B(s, t; t_1, t_2) = \int_0^1 dx \int_0^1 K(x, y; s, t) K(x, y; t_1, t_2) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (s+t)(t_1+t_2) dy = (s+t)(t_1+t_2).$$

Получаем:

$$\alpha z(s, t) + \int_0^1 dt_1 \int_0^1 (s+t)(t_1+t_2) z(t_1, t_2) dt_2 = s+t$$

– интегральное уравнение Фредгольма II рода. Обозначим

$$c = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 (t_1+t_2) z(t_1, t_2) dt_2.$$

Тогда последнее уравнение переписывается в виде:

$$\alpha z(s, t) + (s+t)c = s+t \quad \Rightarrow \quad z(s, t) = \frac{(s+t)(1-c)}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{(s+t)(1-c)}{\alpha} \alpha + (s+t) \int_0^1 dt_1 \int_0^1 (t_1+t_2) \frac{(t_1+t_2)(1-c)}{\alpha} dt_2 = s+t.$$

Сокращая на $(s+t)$, получаем:

$$c = \frac{1-c}{\alpha} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 (t_1+t_2)^2 dt_2 = \frac{1-c}{\alpha} \frac{7}{6},$$

откуда

$$6\alpha c = 7 - 7c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7}{6\alpha + 7}.$$

Таким образом,

$$z_{\eta=0}^\alpha = \frac{(s+t) \left(1 - \frac{7}{6\alpha+7}\right)}{\alpha} = \frac{6(s+t)}{6\alpha+7}.$$

И соответственно,

$$z^0 = \lim_{\alpha \rightarrow +0} z_{\eta=0}^\alpha = \frac{6}{7}(s+t).$$

Проверка подтверждает, что это есть точное решение.

Пример 2.

$$\int_0^1 ds \int_0^1 stz(s, t) dt = xy = u(x, y), \quad x, y, s, t \in [0; 1].$$

Точного решения не существует, так как слева нет зависимости от x, y . Поэтому нужно искать нормальное псевдорешение. Здесь $K(x, y; s, t) = st$,

$$B(s, t; t_1, t_2) = \int_0^1 dx \int_0^1 K(x, y; s, t)K(x, y; t_1, t_2) dy = (st)t_1t_2;$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 K(x, y; s, t)u(x, y) dy = st \int_0^1 dx \int_0^1 xy dy = \frac{st}{4}.$$

Уравнение Эйлера:

$$\alpha z(s, t) + \int_0^1 dt_1 \int_0^1 B(s, t; t_1, t_2)z(t_1, t_2) dt_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 K(x, y; s, t)u(x, y) dy,$$

то есть

$$\alpha z(s, t) + st \int_0^1 dt_1 \int_0^1 t_1t_2z(t_1, t_2) dt_2 = \frac{st}{4}.$$

Положим

$$c = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 t_1t_2z(t_1, t_2) dt_2.$$

Тогда последнее уравнение переписывается в виде:

$$\alpha z(s, t) + (st)c = \frac{st}{4},$$

откуда

$$z = \frac{st(1 - 4c)}{4\alpha}.$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$\left(\frac{1}{4} - c\right) st + \frac{st}{\alpha} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 (t_1t_2)t_1t_2 \left(\frac{1}{4} - c\right) dt_2 = st.$$

Сокращая на (st) , получаем:

$$\left(\frac{1}{4} - c\right) \left[1 + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 t_1^2 dt_1 \int_0^1 t_2^2 dt_2\right] = 1,$$

то есть

$$\left(\frac{1}{4} - c\right) \left[1 + \frac{1}{9\alpha}\right] = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4} - c = \frac{9\alpha}{1 + 9\alpha}.$$

Таким образом,

$$z_{\eta=0}^\alpha = \frac{st}{\alpha} \frac{9\alpha}{1 + 9\alpha} = \frac{9st}{1 + 9\alpha},$$

откуда получаем:

$$z^0 = \lim_{\alpha \rightarrow +0} z_{\eta=0}^\alpha = 9st$$

– нормальное псевдорешение в $L_2([0; 1] \times [0; 1])$. См. [4].

Глава 3. Сведение обратных задач для ОДУ к интегральному уравнению Фредгольма I рода

12. Простейшие задачи

Задача геологоразведки [19]

Рассмотрим простейшую задачу гравитационной геологической разведки полезных ископаемых. Пусть в слое $y \geq h$, где y — глубина под поверхностью Земли, расположены источники аномального гравитационного поля, а при $0 < y < h$ их нет. Если бы было известно гравитационное поле при $y = h$, то есть на границе области, в которой расположены источники аномалии, то можно было бы выявить их структуру. Однако поле вблизи источников недоступно прямому измерению. Поэтому возникает задача его определения по данным наблюдений на открытой поверхности. Выведем соответствующее уравнение, ограничившись для простоты двумерным случаем.

Обозначим x — горизонтальная координата, $z(x)$ — потенциал гравитационного поля при $y = h$. Тогда потенциал поля $u(x, y)$ при $0 < y < h$, где нет источников, является гармонической функцией, то есть описывается уравнением Лапласа:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < y < h, \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(x, h) = z(x). \end{cases}$$

Решение такой задачи дается, как известно, интегральной формулой Пуассона:

$$u(x, y) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(s) ds}{(x-s)^2 + (y-h)^2}.$$

На поверхности Земли, то есть при $y = 0$, величина потенциала $u(x, 0)$ может быть измерена. Положим $u(x, 0) = f(x)$. Тогда для определения искомой функции $z(s)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода:

$$\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(s) ds}{(x-s)^2 + h^2} = f(x).$$

Поскольку за пределами некоторого конечного отрезка влияние аномалии можно считать несущественным, то там функцию $z(s)$ можно считать известной (совпадающей с общим фоном). Тогда приходим к уравнению с интегралом в конечных пределах.

Задача гравиметрии [20]

Задача гравиметрии заключается в определении формы поверхности, разделяющей некоторый участок земной коры на две однородные области (одна из которых ассоциируется с полезными ископаемыми — железной рудой, нефтью и т.д.), по аномалии силы тяжести на поверхности Земли. Пусть

$$f(x) = \frac{2\pi}{\rho_2 - \rho_1} \nabla g(x), \quad x \in [c; d],$$

где $\nabla g(x)$ — измеренная на поверхности Земли ($y = 0$) аномалия силы тяжести (скорость измерения ускорения g свободного падения), x или s — координата вдоль поверхности Земли в направлении, перпендикулярном характерной вытянутости геологических структур. Среда, находящаяся под поверхностью Земли, считается состоящей из двух частей с известными плотностями ρ_1 и ρ_2 , разделенных границей

$$y(s) = \begin{cases} -h, & s \notin [a; b], \\ -h + z(s), & s \in [a; b], \end{cases}$$

где $z(s)$ — искомая форма границы, разделяющей две части среды. По виду этой границы можно судить о составе и масштабе месторождения полезных ископаемых. Связь между функциями $f(x)$ и $z(s)$ выражается равенством:

$$\int_a^b \ln \frac{(x-s)^2 + h^2}{(x-s)^2 + (h-z(s))^2} ds = f(x).$$

Здесь функции $f(x)$ и $z(s)$ предполагаются независимыми от направления вдоль линии вытянутости геологической структуры. Будем считать далее, что $z(s) \ll h$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \ln \frac{(x-s)^2 + h^2}{(x-s)^2 + (h-z)^2}.$$

Ясно, что

$$\varphi(0) = \ln 1 = 0 \Rightarrow \varphi(z) = \varphi(z) - \varphi(0) \approx \varphi'(0)z;$$

$$\varphi'(z) = \frac{(x-s)^2 + (h-z)^2}{(x-s)^2 + h^2} \frac{((x-s)^2 + h^2)2(h-z)}{((x-s)^2 + (h-z)^2)^2} = \frac{2(h-z)}{(x-s)^2 + (h-z)^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi(z) \approx \frac{2hz}{(x-s)^2 + h^2}.$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению Фредгольма I рода для определения неизвестной функции $z(s)$:

$$\int_a^b \frac{2h}{(x-s)^2 + h^2} z(s) ds = f(x), \quad x \in [c; d].$$

При разработке тестов для отладки программы, решающей интегральное уравнение Фредгольма I рода, надо уметь по известному решению $z(s)$ находить правую часть $u(x)$ либо в аналитической форме, либо в виде вектора узловых значений. Для того, чтобы найти $u(x)$ в виде вектора узловых значений, можно использовать возможности численного или символьного вычисления интегралов в системе MATLAB. Но в простейших случаях, подобных рассмотренным выше, можно найти $u(x)$ и в аналитической форме путем непосредственного интегрирования.

Задача. Дана функция $z(s) = s^2$. Найти

$$u(x) = \int_{-1}^1 \frac{z(s) ds}{1 + (s-x)^2}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{s^2 ds}{1 + (s-x)^2} = \int_{-1}^1 \frac{(s-x)^2 + 1 - 1 + 2sx - x^2}{1 + (s-x)^2} ds = \\ & = \int_{-1}^1 ds - \int_{-1}^1 \frac{ds}{1 + (s-x)^2} + x \int_{-1}^1 \frac{d[1 + (s-x)^2]}{1 + (s-x)^2} + x^2 \int_{-1}^1 \frac{ds}{1 + (s-x)^2} = \\ & = 2 + (x^2 - 1) [\operatorname{arctg}(1-x) + \operatorname{arctg}(1+x)] + x \ln \frac{1 + (1-x)^2}{1 + (1+x)^2}. \end{aligned}$$

Обратная задача ЯМР-томографии [14]

Рассмотрим обратную задачу ядерной магнитно-резонансной томографии. Требуется определить распределение плотности тока вдоль бесконечно тонкой обмотки цилиндрической катушки по заданному магнитному полю на ее оси. Напряженность магнитного поля на оси тонкого витка (кругового тока) равна

$$H(x, s) = \frac{kI(s)R^2}{\sqrt{[R^2 + (x - s)^2]^3}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Здесь x — координата точки вдоль оси катушки, s — координата вдоль обмотки катушки, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, $I(s)$ — ток в витке в точке s , R — радиус витка. Для простоты будем считать $k = 1$. Если же имеется бесконечное множество витков, намотанных на цилиндр радиуса R , то интегрируя по виткам, получаем:

$$\int_{-1}^1 \frac{R^2 I(s) ds}{\sqrt{[R^2 + (x - s)^2]^3}} = H(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $H(x)$ — напряженность магнитного поля на оси катушки — известна, так как может быть измерена непосредственно, $I(s)$ — распределение тока вдоль бесконечно тонкой обмотки цилиндрической катушки ЯМР-томографа — подлежит определению.

Задача о восстановлении размытого изображения [9]

Пусть при фотографировании объекта его изображение было сфокусировано не в плоскости эмульсионного слоя пленки, а на некотором малом расстоянии h от него, см. рис. 12.1. Обозначим (A) — плоскость фотопленки, (B) — плоскость изображения объекта, R — радиус объектива, f — расстояние от линзы до плоскости (B) , x, y — координаты в плоскостях (A) и (B) , $u(x, y)$ — освещенность в плоскости (B) , S — поверхность фотопленки. Тогда в рамках геометрической оптики получаем, что пучок лучей, сходящийся в точке на плоскости (B) , в плоскости (A) равномерно осветит круг Ω_r радиуса $r = \frac{Rh}{f}$, так как из подобия треугольников,

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{f}.$$

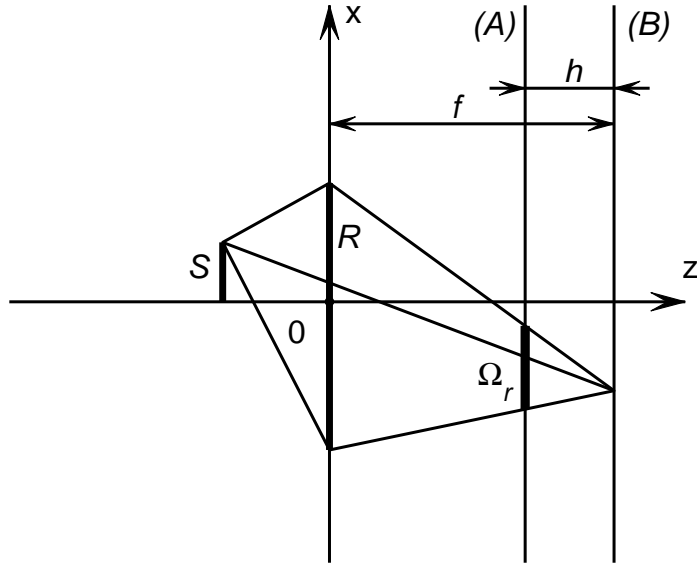


Рис. 12.1. Размытое изображение

Аналитически эта ситуация описывается следующим образом. Сходящемуся в точке (ξ, η) на плоскости (B) световому пучку, несущему единичный световой поток, соответствует освещенность

$$u_0(x, y) = \delta(x - \xi, y - \eta).$$

При этом в плоскости (A) получаем освещенность

$$v_0(x, y) = F((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2),$$

где

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > r^2, \\ \frac{1}{\pi r^2}, & \text{если } 0 < \alpha < r^2. \end{cases}$$

Иначе говоря, вся энергия светового пучка не концентрируется в одной точке (ξ, η) на плоскости (B) , а вместо этого распределяется равномерно на всю площадь круга Ω_r радиуса r с центром в точке (ξ, η) . Пусть $S = [a; b] \times [c; d]$. Таким образом, распределенной освещенности

$$u(x, y) = \iint_S \delta(x - \xi, y - \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

в плоскости (B) соответствует доступная нам для измерения освещенность

$$v(x, y) = \iint_S F((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) u(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (12.1)$$

в плоскости (A). Получили двумерное интегральное уравнение Фредгольма I рода относительно неизвестной функции $u(\xi, \eta)$. Измеряя на фото значения $v(x, y)$ и решая уравнение (12.1), можно восстановить неразмытое изображение $u(x, y)$.

13. Метод функций Грина²

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка.

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad x \in [a; b], \quad (13.1)$$

где функции $p_j(x)$, $j = \overline{0, n}$, непрерывны на $[a; b]$, причем $p_0(x) \neq 0$ для всех $x \in [a; b]$. Пусть, кроме того, заданы линейные формы краевых условий:

$$V_k[y] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_k^j y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_k^j y^{(j)}(b) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (13.2)$$

линейно независимые от величин

$$y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b).$$

Будем предполагать, что краевая задача (13.1), (13.2) имеет лишь тривиальное решение $y \equiv 0$. *Функцией Грина (функцией влияния)* краевой задачи (13.1), (13.2) называется функция $G(x, \xi)$, определенная $\forall x \in [a; b]$, $\xi \in (a; b)$, и обладающая для каждого фиксированного $\xi \in (a; b)$ следующими свойствами.

1°. Функция $G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по переменной $x \in [a; b]$ до порядка $(n - 2)$ включительно.

2°. Существует производная по x порядка $(n - 1)$, имеющая разрыв I рода в точке $x = \xi$ со скачком величины $\frac{1}{p_0(\xi)}$, то есть:

$$\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

²См. [7].

3°. В каждом из промежутков $[a; \xi]$ и $(\xi; b]$ функция $G(x, \xi)$ как функция переменной x является решением уравнения (13.1), то есть $L[G] = 0$.

4°. Функция $G(x, \xi)$ как функция переменной x удовлетворяет краевым условиям (13.2), то есть $V_k[G] = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Теорема 3.1 (о существовании и единственности функции Грина). *Если краевая задача (13.1), (13.2) имеет лишь нулевое решение, то существует в точности одна функция Грина для этой задачи.*

Доказательство. Пусть $y_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, — фундаментальная система решений уравнения (13.1). Тогда, согласно свойству 3°, функцию Грина следует искать в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_k(\xi) y_k(x), & x \in [a; \xi], \\ \sum_{k=1}^n b_k(\xi) y_k(x), & x \in [\xi; b]. \end{cases}$$

Положим $c_k = c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$, $k = \overline{1, n}$. Тогда из свойства 1° (условия непрерывной стыковки для производных до порядка $(n - 2)$ включительно) и свойства 2° (условия скачка производной порядка $(n - 1)$) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n c_k y_k(\xi) = 0, \\ \sum_{k=1}^n c_k y'_k(\xi) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n c_k y_k^{(n-2)}(\xi) = 0, \\ \sum_{k=1}^n c_k y_k^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}. \end{array} \right.$$

Определителем этой системы является вронскиан фундаментальной системы решений (а он для нее, как известно, не обращается в ноль), то есть

$$\Delta = W[y_1, \dots, y_n](\xi) = W(\xi) \neq 0.$$

Следовательно, параметры $c_k = c_k(\xi)$, $k = \overline{1, n}$, определяются однозначно. Теперь для отыскания параметров a_k , b_k , $k = \overline{1, n}$, используем краевые условия

(13.2). Положим

$$A_k[y] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_k^j y^{(j)}(a), \quad B_k[y] = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_k^j y^{(j)}(b).$$

Тогда $V_k[y] = A_k[y] + B_k[y]$, $k = \overline{1, n}$. Согласно свойству 4°, получаем:

$$V_k[G] = \sum_{i=1}^n a_i A_k[y_i] + \sum_{i=1}^n b_i B_k[y_i] = 0,$$

$k = \overline{1, n}$. Так как $a_k = b_k - c_k$, $A_k[y] + B_k[y] = V_k[y]$, то получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных b_i , $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n b_i V_k[y_i] = \sum_{i=1}^n c_i A_k[y_i], \\ k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы

$$\Delta = \det (V_k[y_i])_{k,i=\overline{1,n}} \neq 0$$

вследствие линейной независимости форм V_k , $k = \overline{1, n}$, то она имеет единственное решение b_i , $i = \overline{1, n}$. По нему однозначно определяются параметры $a_i = b_i - c_i$, $i = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.1 конструктивно — оно описывает алгоритм, который позволяет построить функцию Грина в каждом конкретном случае. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 3.1. Найдем функцию Грина для краевой задачи

$$y'' = 0, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Общее решение уравнения: $y = C_1 + C_2 x$. Используя краевые условия, получаем:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 a = 0, \\ C_1 + C_2 b = 0, \end{cases}$$

откуда $C_2(b - a) = 0$, следовательно, $C_2 = 0$, $C_1 = 0$. Таким образом, задача имеет лишь нулевое решение $y \equiv 0$. Поэтому по теореме 3.1 существует в точности одна функция Грина.

Фундаментальная система решений: $y_1 \equiv 1$, $y_2 = x$. В соответствии с алгоритмом, ищем функцию Грина в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 + a_2 x, & x \in [a; \xi], \\ b_1 + b_2 x, & x \in [\xi; b]. \end{cases}$$

Положим $c_k = b_k - a_k$, $k = 1, 2$. Из условия непрерывной стыковки самой функции и условия скачка первой производной получаем:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\xi = 0, \\ c_2 = \frac{1}{p_0} = 1, \end{cases}$$

откуда $c_2 = 1$, $c_1 = -\xi$.

По свойству 4° должны выполняться краевые условия:

$$G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0,$$

то есть

$$a_1 + a_2a = b_1 + b_2b = 0.$$

При этом

$$a_1 = b_1 - c_1 = b_1 + \xi, \quad a_2 = b_2 - c_2 = b_2 - 1.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} b_1 + ab_2 = -\xi + a, \\ b_1 + bb_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$b_2 = \frac{\xi - a}{b - a}, \quad b_1 = -bb_2 = -\frac{b(\xi - a)}{b - a}.$$

Отсюда

$$a_1 = b_1 + \xi = \frac{ab - b\xi + \xi b - a\xi}{b - a} = \frac{a(b - \xi)}{b - a},$$

$$a_2 = b_2 - 1 = \frac{\xi - a - b + a}{b - a} = \frac{\xi - b}{b - a}.$$

Таким образом, при $x \in [a; \xi]$ имеем:

$$G(x, \xi) = a_1 + a_2x = \frac{\xi - b}{b - a}(-a + x);$$

при $x \in [\xi; b]$ имеем:

$$G(x, \xi) = b_1 + b_2x = \frac{\xi - a}{b - a}(-b + x).$$

Иначе говоря,

$$G(x, \xi) = \frac{1}{b - a} \begin{cases} (x - a)(\xi - b), & x \in [a; \xi], \\ (\xi - a)(x - b), & x \in [\xi; b]. \end{cases}$$

Отметим, что в данном случае можно существенно упростить выкладки, если с самого начала выбрать фундаментальную систему решений несколько иным образом. А именно, возьмем $y_1 = x - a$, $y_2 = x - b$. Очевидно, что обе эти функции являются решением исходного уравнения. При этом вронскиан

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} x - a & x - b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x - a) - (x - b) = b - a \neq 0.$$

Таким образом, данные два решения линейно независимы, то есть образуют фундаментальную систему решений. Учитывая, что $y_1(a) = y_2(b) = 0$, функция вида

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)y_1(x), & x \in [a; \xi], \\ c_2(\xi)y_2(x), & x \in [\xi; b] \end{cases}$$

будет удовлетворять краевым условиям. И именно в таком виде можно искать функцию Грина. Из условия непрерывной стыковки функции и условия скачка производной получаем:

$$\begin{cases} c_1y_1(\xi) - c_2y_2(\xi) = 0, \\ c_1y_1'(\xi) - c_2y_2'(\xi) = -\frac{1}{p_0} = -1. \end{cases}$$

Пользуясь правилом Крамера, находим:

$$c_1 = \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)}, \quad c_2 = \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)}, \quad W(\xi) = W[y_1, y_2](\xi) = b - a.$$

Аналогичный подход при $n = 2$ можно использовать и в более общей ситуации.

Пример 3.2. Найдем функцию Грина для краевой задачи

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0, \quad x \in [a; b]; \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (13.3)$$

где $q(x)$ — непрерывная функция, а $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая, причем $p(x) \neq 0$ для всех $x \in [a; b]$. Кроме того, будем предполагать, что задача (13.3) имеет лишь нулевое решение.

Пусть $y_1(x)$ — решение уравнения (13.3), определяемое начальными условиями: $y_1(a) = 0$, $y_1'(a) = \alpha \neq 0$. Поскольку задача (13.3) имеет лишь нулевое решение, то ясно, что $y_1(b) \neq 0$. Очевидно также, что все функции вида $y = C_1y_1(x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, также являются решениями уравнения (13.3) и зануляются на левом конце. Аналогичным образом, найдем ненулевое решение $y_2(x)$ такое, что $y_2(b) = 0$.

Покажем, что решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ будут линейно независимыми. В самом деле, если при некоторых $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1^2 + C_2^2 > 0$, оказалось, что

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b],$$

то при $x = b$ получаем: $C_1 y_1(b) = 0$, откуда $C_1 = 0$; а при $x = a$ аналогичным образом, $C_2 = 0$. Таким образом, $C_1 = C_2 = 0$, что противоречит предположению $C_1^2 + C_2^2 > 0$.

Стало быть, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, вронсиан $W[y_1, y_2](\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in (a; b)$.

Учитывая, что $y_1(a) = y_2(b) = 0$, функция вида

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)y_1(x), & x \in [a; \xi], \\ c_2(\xi)y_2(x), & x \in [\xi; b] \end{cases}$$

будет удовлетворять краевым условиям. И именно в таком виде можно искать функцию Грина. Из условия непрерывной стыковки функции и условия скачка производной получаем:

$$\begin{cases} c_1 y_1(\xi) - c_2 y_2(\xi) = 0, \\ c_1 y_1'(\xi) - c_2 y_2'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}. \end{cases}$$

Пользуясь правилом Крамера, находим:

$$c_1 = -\frac{1}{W(\xi)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(\xi) \\ \frac{1}{p(\xi)} & y_2'(\xi) \end{vmatrix} = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)},$$

$$c_2 = -\frac{1}{W(\xi)} \begin{vmatrix} -y_1(\xi) & 0 \\ -y_1'(\xi) & \frac{1}{p(\xi)} \end{vmatrix} = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}.$$

Таким образом,

$$G(x, \xi) = \frac{1}{p(\xi)W(\xi)} \begin{cases} y_1(x)y_2(\xi), & x \in [a; \xi], \\ y_1(\xi)y_2(x), & x \in [\xi; b]. \end{cases}$$

Пример 3.3. Найдем функцию Грина для краевой задачи

$$y'' - k^2 y = 0, \quad x \in [0; 1]; \quad y(0) = y(1) = 0,$$

Имеем задачу вида (13.3) при $p \equiv 1$, $q \equiv -k^2$, $a = 0$, $b = 1$. В качестве решения, зануляющегося на левом конце, имеем: $y_1 = \text{sh}(kx)$. Аналогично, решением, зануляющимся на правом конце, будет $y_2 = \text{sh}[k(x-1)]$. Вронскиан

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \text{sh}(kx) & \text{sh}[k(x-1)] \\ k \text{ch}(kx) & k \text{ch}[k(x-1)] \end{vmatrix} =$$

$$= k \{ \text{sh}(kx) \text{ch}[k(x-1)] - \text{ch}(kx) \text{sh}[k(x-1)] \} = k \text{sh}[kx - k(x-1)] = k \text{sh} k \neq 0.$$

Таким образом, данные две функции образуют фундаментальную систему решений. В соответствии с результатами, полученными в предыдущем примере, имеем:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{p(\xi)W(\xi)} \begin{cases} y_1(x)y_2(\xi), & x \in [0; \xi], \\ y_1(\xi)y_2(x), & x \in [\xi; 1], \end{cases}$$

то есть

$$G(x, \xi) = \frac{1}{k \text{sh} k} \begin{cases} \text{sh}(kx) \text{sh}[k(\xi-1)], & x \in [0; \xi], \\ \text{sh}(k\xi) \text{sh}[k(x-1)], & x \in [\xi; 1]. \end{cases}$$

Пример 3.4. Найдем функцию Грина для краевой задачи

$$y^{(4)} = 0, \quad x \in [0; 1]; \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$$

Покажем, что краевая задача имеет лишь нулевое решение. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda = 0$ кратности 4. Следовательно, фундаментальная система решений дифференциального уравнения:

$$y_1 \equiv 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \quad y_4 = x^3.$$

Стало быть, общее решение:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Из краевых условий получаем:

$$y(0) = A = 0, \quad y'(0) = B = 0,$$

$$\begin{cases} y(1) = C + D = 0, \\ y'(1) = 2C + 3D = 0, \end{cases}$$

откуда $C = D = 0$. Таким образом, краевая задача имеет лишь нулевое решение $y \equiv 0$. Поэтому, согласно теореме 3.1, существует в точности одна функция Грина.

В соответствии со структурой общего решения будем искать функцию Грина в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3, & x \in [0; \xi], \\ b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3, & x \in [\xi; 1], \end{cases}$$

где $a_k = a_k(\xi)$, $b_k = b_k(\xi)$, $k = \overline{1, 4}$. Положим $c_k = b_k - a_k$, $k = \overline{1, 4}$.

Из условия непрерывной стыковки функции и ее производных до второго порядка включительно (свойства 1°), а также условия скачка производной третьего порядка (свойства 2°) получаем:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 = 0, \\ c_2 + 2c_3\xi + 3c_4\xi^2 = 0, \\ 2c_3 + 6c_4\xi = 0, \\ 6c_4 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$c_1 = -\frac{1}{6}\xi^3, \quad c_2 = \frac{\xi^2}{2}, \quad c_3 = -\frac{\xi}{2}, \quad c_4 = \frac{1}{6}. \quad (13.4)$$

Согласно свойству 4°, должны выполняться краевые условия:

$$G(0, \xi) = 0, \quad G'_x(0, \xi) = 0, \quad G(1, \xi) = 0, \quad G'_x(1, \xi) = 0,$$

то есть

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0, \quad b_2 + 2b_3 + 3b_4 = 0.$$

Из (13.4) получаем:

$$b_1 = a_1 + c_1 = -\frac{\xi^3}{6}, \quad b_2 = a_2 + c_2 = \frac{\xi^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} b_3 + b_4 = \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2}, \\ 2b_3 + 3b_4 = -\frac{\xi^2}{2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$b_4 = -\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} + \xi^2 = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3},$$

$$b_3 = \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} = \frac{\xi^3}{2} - \xi^2.$$

Соответственно,

$$a_3 = b_3 - c_3 = \frac{\xi^3}{2} - \xi^2 + \frac{\xi}{2},$$

$$a_4 = b_4 - c_4 = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} - \frac{1}{6}.$$

Окончательно,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{\xi}{2} - \xi^2 + \frac{\xi^3}{2} \right) x^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} \right) x^3, & x \in [0; \xi], \\ -\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{2}x + \left(\frac{\xi^3}{2} - \xi^2 \right) x^2 + \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) x^3, & x \in [\xi; 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу (13.2) для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$L[y](x) = f(x), \quad x \in (a; b). \quad (13.5)$$

Теорема 3.2. *Если $G(x, \xi)$ – функция Грина задачи (13.1), (13.2), то решением задачи (13.5), (13.2) будет*

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad x \in [a; b].$$

Замечание. *Таким образом, обратная задача, состоящая в определении воздействия $f(x)$ по наблюдаемому решению $y(x)$, сводится к интегральному уравнению Фредгольма I рода.*

Задачи.

1. Найти функцию Грина для краевой задачи

$$y'' + k^2 y = 0, \quad x \in [0; 1]; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Доказать симметричность функции Грина: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

2. Найти функцию Грина для краевой задачи

$$y^{(4)}(x) = 0, \quad x \in (0; 1); \quad y(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0.$$

Доказать симметричность функции Грина: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

14. Обратные задачи математической физики³

Далее мы рассмотрим некоторые простейшие обратные задачи математической физики и опишем их сведение к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Исследование более сложных (и вполне реальных) прикладных обратных задач можно найти, например, в [6] (обратные задачи динамики), [15] (обратные задачи для одномерной модели неустановившегося движения воды в реках, расчет и прогноз гидрографа стока по длине реки), [24] (обратные задачи геофизики, астрофизики, обработки изображений, колебательной спектроскопии, электронной микроскопии, акустики и т.д.). Изложение современной теории обратных задач можно найти также в [1]. Общий обзор об обратных задачах естествознания см. в [10]. О связи теории обратных задач с искусственным интеллектом см. в [11].

Обратная задача теплопроводности

1. Возрастание температуры.

Пусть процесс нагрева стержня длиной $L = 1$ описывается уравнением теплопроводности:

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = f(x, t), & x \in [0; 1], t \geq 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = V(x), & x \in [0; 1]. \end{cases} \quad (14.1)$$

Предположим, из наблюдений установлено, что

$$u(x, t) = V(x)e^t, \quad x \in [0; 1], \quad t \geq 0, \quad (14.2)$$

и требуется найти плотность источников тепла $f(x, t)$.

Замечание. Можно понимать $f(x, t)$ как управление процессом нагрева стержня, которое требуется выбрать так, чтобы режим нагрева подчинялся закону (14.2), где $V(0) = V(1) = 0$, то есть чтобы в каждой точке $x \in (0; 1)$ нагрев происходил экспоненциально по времени.

Функцию $f(x, t)$ естественно искать в виде:

$$f(x, t) = \varphi(x) e^t,$$

где функция $\varphi(x)$ неизвестна. Имеем:

$$u(0, t) = V(0)e^t = 0 \quad \Rightarrow \quad V(0) = 0;$$

³См. [7].

$$u(1, t) = V(1)e^t = 0 \quad \Rightarrow \quad V(1) = 0;$$

$$u'_t - u''_{xx} = V(x)e^t - V''(x)e^t = \varphi(x)e^t,$$

следовательно,

$$V'' - V = -\varphi(x), \quad x \in (0; 1); \quad V(0) = V(1) = 0.$$

Как известно из предыдущего раздела, решение определяется через функцию Грина:

$$V(x) = - \int_0^1 G(x, s) \varphi(s) ds, \quad x \in [0; 1],$$

где

$$G(x, s) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(s-1), & x \in [0; s], \\ \operatorname{sh}(s) \operatorname{sh}(x-1), & x \in [s; 1]. \end{cases}$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода для отыскания неизвестной функции $\varphi(x)$ по заданной функции $V(x)$.

2. Убывание температуры.

Пусть процесс нагрева стержня длиной $L = 1$ описывается уравнением теплопроводности (14.1). Требуется так организовать управление $f(x, t)$ процессом охлаждения стержня, чтобы режим охлаждения подчинялся закону

$$u(x, t) = V(x)e^{-t}, \quad x \in [0; 1], \quad t \geq 0, \quad V(0) = V(1) = 0.$$

Задача. Привести данную обратную задачу к интегральному уравнению Фредгольма I рода.

Обратная задача об отыскании ускорения

Пусть тело массой m движется прямолинейно под действием некоторой силы $f(t)$. Из наблюдений за телом известен закон движения $x(t)$, $t \in [0; T]$, причем $x(0) = x(T) = 0$. Требуется, исходя из этих наблюдений, найти вынуждающую силу $f(t)$ (или ускорение \ddot{x} ; на практике, как правило, известны лишь значения $x(t)$ на некоторой сетке).

Согласно II закону Ньютона, $m\ddot{x} = f(t)$. Таким образом, $x(t)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{m} f(t), & t \in [0; T], \\ x(0) = x(T) = 0. \end{cases}$$

Как известно из предыдущего раздела, решение прямой задачи определяется через функцию Грина:

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^T G(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0; T], \quad \text{где } G(t, s) = \frac{1}{T} \begin{cases} (s - T)t, & t \in [0; s], \\ s(t - T), & t \in [s; T]. \end{cases}$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода для отыскания неизвестной функции $f(t)$ по заданной функции $x(t)$.

Обратная задача о вынужденных колебаниях струны

Процесс вынужденных колебаний струны длиной $L = 1$ с жестко закрепленными концами описывается уравнением:

$$\begin{cases} qu''_{tt} - pu''_{xx} = f(x, t), & x \in [0; 1], t \geq 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = V(x), u'_t(x, 0) = 0, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

Требуется так организовать управление $f(x, t)$ процессом колебаний струны, чтобы режим колебаний подчинялся закону

$$u(x, t) = V(x) \cos(\omega t), \quad x \in [0; 1], \quad t \geq 0; \quad \omega > 0.$$

Управление $f(x, t)$ естественно искать в виде

$$f(x, t) = \lambda(x) \cos(\omega t), \quad x \in [0; 1], \quad t \geq 0,$$

где функция $\lambda(x)$ неизвестна. Имеем:

$$u(0, t) = V(0) \cos(\omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(0) = 0;$$

$$u(1, t) = V(1) \cos(\omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(1) = 0;$$

$$qu''_{tt} - pu''_{xx} = -(q\omega^2 V(x) + pV''(x)) \cos(\omega t) = \lambda(x) \cos(\omega t),$$

следовательно,

$$pV''(x) + q\omega^2 V(x) = -\lambda(x),$$

то есть

$$V'' + k^2 V = -\frac{1}{p} \lambda(x),$$

где $k = \omega \sqrt{\frac{q}{p}}$. Таким образом, получаем краевую задачу

$$\begin{cases} V'' + k^2 V = -\frac{1}{p} \lambda(x), & x \in [0; 1], \\ V(0) = V(1) = 0. \end{cases}$$

Как известно из предыдущего раздела, решение этой (прямой) задачи определяется через функцию Грина:

$$V(x) = -\frac{1}{p} \int_0^1 G(x, s) \lambda(s) ds, \quad x \in [0; 1],$$

где

$$G(x, s) = \frac{1}{k \sin k} \begin{cases} \sin(kx) \sin[k(s-1)], & x \in [0; s], \\ \sin(ks) \sin[k(x-1)], & x \in [s; 1]. \end{cases}$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода для отыскания неизвестной функции $\lambda(x)$ по заданной функции $V(x)$.

Обратная задача о вынужденных колебаниях маятника

Процесс вынужденных колебаний математического (пружинного) маятника описывается уравнением

$$L[x] = x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} f(t), \quad t \in [0; T], \quad (14.3)$$

где m — масса материальной точки, совершающей колебания, $\beta > 0$ — коэффициент затухания, ω — циклическая частота свободных незатухающих колебаний, $x(t)$ — отклонение от положения равновесия $x = 0$ в момент времени t , $f(t)$ — вынуждающая сила.

Требуется так организовать управление колебаниями, то есть подобрать вынуждающую силу $f(t)$, чтобы колебания подчинялись заданному закону $x(t)$, $x(0) = x(T) = 0$.

Рассмотрим случай $\beta = 1$, $\omega = 1$, $T = 1$. Тогда функция Грина для аналогичной задачи, связанной с однородным уравнением, имеет вид:

$$G(t, \xi) = e^{\xi-t} \begin{cases} (\xi-1)t, & t \in [0; \xi], \\ (t-1)\xi, & t \in [\xi; 1]. \end{cases}$$

Задача. Проверить это.

Соответственно, решение прямой задачи

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^1 G(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0; 1].$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода для отыскания неизвестной функции $f(t)$ по заданной функции $x(t)$.

Рассмотрим случай неоднородных краевых условий $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$ для уравнения (14.3). Решение прямой задачи в этом случае можно записать в виде:

$$x(t) = y(t) + z(t),$$

где y — решение однородной краевой задачи для неоднородного уравнения:

$$L[y] = \frac{1}{m} f(t), \quad t \in [0; T]; \quad y(0) = y(T) = 0, \quad (14.4)$$

а z — решение неоднородной краевой задачи для однородного уравнения:

$$L[z] = 0, \quad t \in [0; T]; \quad z(0) = x_0, \quad z(T) = x_1. \quad (14.5)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} L[x] &= L[y + z] = L[y] + L[z] = \frac{1}{m} f(t), \\ x(0) &= y(0) + z(0) = x_0, \quad x(T) = y(T) + z(T) = x_1. \end{aligned}$$

Пусть $G(t, s)$ — функция Грина задачи (14.4). Тогда

$$x(t) - z(t) = y(t) = \frac{1}{m} \int_0^T G(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0; T].$$

Таким образом, вновь получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода для отыскания неизвестной функции $f(t)$ по заданной функции $x(t)$.

15. Случай начальных условий

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] = p_n y^{(n)}(x) + \dots + p_1 y'(x) + p_0 y(x) = f(x), & x \in [0; L], \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (15.1)$$

Требуется по наблюдению $y(x)$ восстановить правую часть $f(x)$. Используем формулу, известную из математического анализа:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_n} f(s) ds = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds.$$

Интегрируя n раз уравнение (15.1), получаем:

$$F(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds,$$

где

$$F(x) = F[y](x) \equiv p_n y(x) + p_{n-1} \int_0^x y(s) ds + \dots + p_0 \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} y(s) ds.$$

Получаем интегральное уравнение Фредгольма I рода относительно неизвестной функции $f(x)$:

$$\int_0^L K(x, s) f(s) ds = F(x), \quad x \in [0; L],$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & s \in [0; x], \\ 0, & s \in (x; L]. \end{cases}$$

Рассмотрим случай ненулевых начальных условий:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] = f(x), & x \in [0; L], \\ y(0) = y_0, & y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Делая замену

$$z(x) = y(x) - \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} y_k,$$

получаем:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[z] = \psi(x), & \psi(x) = f(x) - \mathcal{L}[\varphi](x), & x \in [0; L], \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int_0^L K(x, s) \psi(s) ds = F[z](x), \quad x \in [0; L],$$

то есть

$$\int_0^L K(x, s) f(s) ds = F[z](x) + \int_0^L K(x, s) \mathcal{L}[\varphi](s) ds, \quad x \in [0; L].$$

Получили интегральное уравнение Фредгольма I рода относительно неизвестной функции $f(x)$.

Глава 4. Индивидуальные задания

16. Задачи

Задача: Найти с помощью метода регуляризации Тихонова нормальное решение двумерной точной системы $A_0 z = u_0$, если дана возмущенная система $A_\varepsilon z = u_\varepsilon$, при условии, что известна априорная информация о совместности точной системы.

$$1. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

$$2. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4\varepsilon - \varepsilon^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 + \varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}.$$

$$4. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^4 & \varepsilon^5 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 \\ \varepsilon^6 \end{pmatrix}.$$

$$5. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 4\varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^9 \\ \varepsilon^3 \end{pmatrix}.$$

$$6. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \\ 2 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

$$7. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 5 + \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

$$8. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

$$10. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 3\varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 + \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Задача: Найти с помощью метода регуляризации Тихонова нормальное решение двумерной точной системы $A_0 z = u_0$, если дана возмущенная система $A_\varepsilon z = u_\varepsilon$, при условии, что информация о совместности точной системы отсутствует.

1. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$
2. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 - \varepsilon^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$
3. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 + \varepsilon \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}.$
4. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^4 & \varepsilon^5 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon^3 \\ \varepsilon^6 \end{pmatrix}.$
5. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 4\varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^9 \\ 1 + \varepsilon^3 \end{pmatrix}.$
6. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$
7. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 5 + \varepsilon \\ 1 + \varepsilon \end{pmatrix}.$
8. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}.$
9. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}.$
10. $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 3\varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 + \varepsilon \\ 2 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$

Задача: Найти нормальное решение системы $Az = u$ двумя способами:

1) путем минимизации невязки исходной системы; 2) как минимальное по модулю классическое решение нормальной системы $A^*Az = A^*u$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$6. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача: Методом квадратных корней решить систему $Ax = b$ с симметричной положительно определенной матрицей. С помощью полученного разложения Холецкого $A = T^*T$ вычислить $\det A$, A^{-1} . Найти число обусловленности и выяснить, какую относительную погрешность может иметь решение возмущенной системы при возмущении одной из компонент правой части на величину 0.01.

$$1. A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -5 & 13 \end{pmatrix}, b = (10, 20, 1, 3)^*.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 & 13 \end{pmatrix}, b = (1, 5, 5, -7)^*.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -6 & 13 \end{pmatrix}, b = (-3, 5, -6, 13)^*.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 & -6 \\ -6 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & -5 \\ -6 & 3 & -5 & 10 \end{pmatrix}, b = (9, -8, -1, 1)^*.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, b = (1, -3, -7, 0)^*.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, b = (1, -8, -9, 0)^*.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & -6 & 11 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, b = (1, 6, -10, 0)^*.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & -10 \\ -3 & 0 & -10 & 11 \end{pmatrix}, b = (-2, 0, -7, 8)^*.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & -8 \\ -4 & 0 & -8 & 9 \end{pmatrix}, b = (0, 0, -4, 5)^*.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 8 & -6 \\ -4 & -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}, b = (-4, -12, -2, 8)^*.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & -6 & -4 & 10 \end{pmatrix}, b = (0, -3, 1, -1)^*.$$

Задача: Решить систему с матрицей $(M^*M + \alpha C)z = f$ с симметричной, положительно определенной матрицей, зависящей от параметра $\alpha > 0$, с помощью разложения Холецкого матрицы C и сингулярного разложения вспомогательной матрицы, при $\alpha = 1$.

$$1. M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, f = (-4, 0, 2)^*.$$

$$2. M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, f = (5, 5, 5)^*.$$

$$3. M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -3\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$4. M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -5\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -3\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

$$5. M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -3\frac{1}{\sqrt{2}} & 15\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 13 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$6. M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, f = (-4, 0, 2)^*.$$

$$7. M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix}, f = (5, -5, -5)^*.$$

$$8. M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ -3\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}, f = (20, -20, 0)^*.$$

$$9. M = \begin{pmatrix} -3\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 9\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, f = (30, -30, 30)^*.$$

$$10. M = \begin{pmatrix} -3\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 9\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, f = (0, 30, 30)^*.$$

17. Задания лабораторных работ

I. Задание. Получить выражение функции обобщенной невязки $\rho_\varepsilon(\alpha)$ для решения точной системы $A_0 z = u_0$, если дана возмущенная система $A_\varepsilon z = u_\varepsilon$, при условии, что известна априорная информация о совместности точной системы. Построить графики функций $\rho_\varepsilon(\alpha)$, $\rho_\varepsilon^2(\alpha)$. Решить уравнение обобщенной невязки $\rho_\varepsilon(\alpha) = 0$ путем минимизации функции $\rho_\varepsilon^2(\alpha)$ методом золотого сечения в системе MATLAB или SciLab, при значениях $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$. По найденному решению уравнения обобщенной невязки найти соответствующее приближение к нормальному решению точной системы. Указать нормальное решение точной системы. Сделать проверку.

$$1. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad 2. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4\varepsilon - \varepsilon^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 + \varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}. \quad 4. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^4 & \varepsilon^5 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 \\ \varepsilon^6 \end{pmatrix}.$$

$$5. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 4\varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^9 \\ \varepsilon^3 \end{pmatrix}. \quad 6. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \\ 2 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

$$7. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 5 + \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}. \quad 8. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}. \quad 10. A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 3\varepsilon \end{pmatrix}, u_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 + \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

II. Задания. Создать комплекс программ для решения коэффициентной обратной задачи, связанной с уравнением установившихся колебаний упругого стержня, по наблюдению на правом конце, а именно для определения модуля упругости $E(x)$, см. § 10. Задачу решить как некорректную путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма I рода с помощью линеаризации по малому параметру и его решения методом регуляризации Тихонова в сочетании с дискретизацией уравнения обобщенной невязки. Для решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений с симметричной, положительно определенной матрицей, зависящей от параметра $\alpha > 0$, использовать

метод квадратных корней, либо метод сингулярного разложения в сочетании с факторизацией Холецкого. С помощью разработанного программного комплекса для конкретных данных, представленных далее, получить приближенное решение обратной задачи и сравнить его с точным решением, указав соответствующую погрешность. Наблюдение на правом конце получить, исходя из точного решения $E(x)$ обратной задачи путем решения прямой задачи, разработав соответствующую программу. Сравнить точное и приближенное решение обратной задачи, оценив погрешности и построив графики.

Далее везде $E(x) = 1 + z(x) = E_0 + \varepsilon\eta(x)$, то есть $E_0 \equiv 1$, $\varepsilon\eta(x) = z(x)$; $\ell = 0.5$, $p = 1$, $\rho = 1$, $\omega \in [\omega_1; \omega_2]$, $\omega_1 = 0.5$, $\omega_2 = 2.7$; N – количество участков разбиения отрезка $[0; \ell]$, M – количество участков разбиения отрезка $[k_1; k_2]$, где $k_i = \sqrt{\frac{\rho}{E_0}} \omega_i = \omega_i$, $i = 1, 2$.

$$1) z(x) = \frac{x(x+1)}{10}, N = M = 12, h = 10^{-8}, \delta = 10^{-4}.$$

$$2) z(x) = \frac{x + \sin x}{10}, N = M = 12, h = 10^{-8}, \delta = 10^{-4}.$$

$$3) z(x) = 0.1 \sin(x^2), N = M = 90, h = 10^{-9}, \delta = 10^{-6}.$$

$$4) z(x) = \frac{\ln(x+1)}{10}, N = M = 20, h = 10^{-5}, \delta = 10^{-4}.$$

$$5) z(x) = \frac{x}{10}, N = M = 12, h = 10^{-8}, \delta = 10^{-4}.$$

$$6) z(x) = \frac{x^2}{50}, N = M = 100, h = 10^{-9}, \delta = 10^{-7}.$$

$$7) z(x) = 0.01(x + \cos x), N = M = 90, h = 10^{-3}, \delta = 10^{-5}.$$

$$8) z(x) = 0.1x \cos x, N = M = 90, h = 10^{-3}, \delta = 10^{-5}.$$

$$9) z(x) = 0.1x \sin x, N = M = 50, h = 10^{-9}, \delta = 10^{-6}.$$

$$10) z(x) = 0.1x \ln(1+x), N = M = 50, h = 10^{-9}, \delta = 10^{-6}.$$

$$11) z(x) = 0.02 \sin(10x) \ln(1+x), N = M = 100, h = 10^{-7}, \delta = 10^{-7}.$$

$$12) z(x) = 0.03 \cos(10x) \ln(1+x), N = M = 100, h = 10^{-7}, \delta = 10^{-7}.$$

$$13) z(x) = 0.02 \sin(10x) \sin x, N = M = 100, h = 10^{-7}, \delta = 10^{-7}.$$

$$14) z(x) = 0.02 \sin(10x) \cos x, N = M = 100, h = 10^{-7}, \delta = 10^{-5}.$$

Графики точного $z_0(x)$ и приближенного $z(x)$ решения обратной задачи

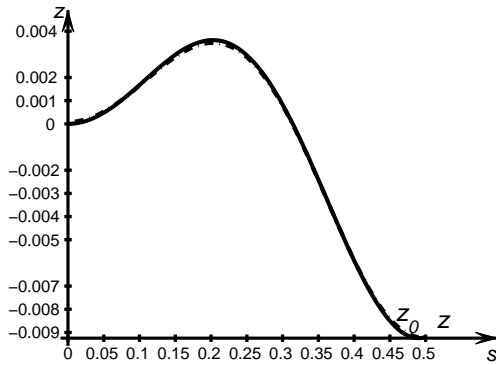


Рис. 17.1. Вариант № 13

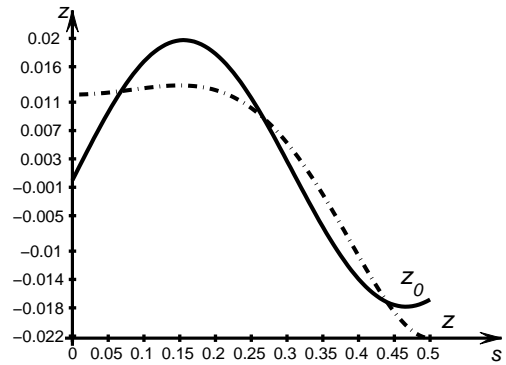


Рис. 17.2. Вариант № 14

- 15) $z(x) = 0.02 \cos(10x) \cos x$, $N = M = 100$, $h = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-6}$.
- 16) $z(x) = 0.02 \cos(10x) \sin x$, $N = M = 100$, $h = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-9}$.
- 17) $z(x) = 0.02 \sin(10x) \sin(x^2)$, $N = M = 100$, $h = 10^{-7}$, $\delta = 10^{-7}$.
- 18) $z(x) = 0.02 \sin(10x) \cos(x^2)$, $N = M = 100$, $h = 10^{-7}$, $\delta = 10^{-5}$.
- 19) $z(x) = 0.02 \cos(10x) \cos(x^2)$, $N = M = 100$, $h = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-6}$.
- 20) $z(x) = 0.1 \cos(10x) \sin(x^2)$, $N = M = 100$, $h = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-7}$.

Отметим, что при использовании метода линеаризации по параметру для решения коэффициентной обратной задачи возникает неустранимая относительная погрешность, которая оказывается малой лишь в том случае, когда функция $z(x)$ достаточно мала. В противном случае хорошего совпадения графиков точной и приближенной функции $z(x)$ ожидать не стоит — ср. рис. 17.1 и 17.2. Большое значение также имеет удачное согласование между количеством узлов N , M , с одной стороны, и параметрами точности h и δ , с другой. В частности, отклонение от заданного значения δ на порядок приводит к существенному ухудшению решения. При увеличении δ относительная погрешность плавно возрастает, а при уменьшении — возникают резкие колебания («биения») приближенного решения около точного.

Список литературы

1. **Васин, В.В.** *Основы теории некорректных задач* / В.В.Васин. — Новосибирск: СО РАН, 2020. — 312 с.
2. **Ватульян, А.О.** *Методические указания к практическим заданиям по с/к «Обратные задачи механики» для студентов мех.-мат. ф-та* / А.О.Ватульян, О.В.Явруян. — Ростов-на-Дону: РГУ, 2005. — 27 с.
3. **Вержбицкий, В.М.** *Основы численных методов* / В.М.Вержбицкий. — М.: Высшая школа, 2002. — 840 с.
4. **Верлань, А.Ф.** *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы* / А.Ф.Верлань, В.С.Сизиков. — Киев: Наукова Думка, 1986. — 543 с.
5. **Воеводин, В.В.** *Матрицы и вычисления* / В.В.Воеводин, Ю.А.Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
6. **Гафаров, Г.Г.** *Обратные задачи динамики в групповых переменных* / Г.Г.Гафаров,. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. — 120 с.
7. **Гласко, В.Б.** *Обратные задачи математической физики* / В.Б.Гласко. — М.: МГУ, 1984. — 112 с.
8. **Годунов, С.К.** *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах* / С.К.Годунов, А.Г.Антонов, О.П.Кирилюк, В.И.Костин. — Новосибирск: Наука, 1998. — 360 с.
9. **Гончарский, А.В.** *Обратные задачи оптики* // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1986. № 3. С.59–76.
10. **Кабанихин, С.И.** *Обратные задачи естествознания* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т.60. № 6. С. 935–938.
11. **Кабанихин, С.И.** *Обратные задачи и искусственный интеллект* // Успехи кибернетики. 2021. Т.2. № 3. С. 33–43.
12. **Калашников, А.Л.** *Методы регуляризации для уравнения Фредгольма первого рода и обратных задач с применением пакета SCILAB* / А.Л.Калашников. — Нижний Новгород: ННГУ, 2011. — 158 с.

13. **Крылов, В.И.** *Приближенное вычисление интегралов* / В.И.Крылов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.
14. **Петров, Ю.П.** *Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями* / Ю.П.Петров, В.С.Сизиков. — СПб.: Политехник, 2003. — 261 с.
15. **Романов, А.В.** *Обратные задачи математического моделирования неустановившегося движения воды в реках* / А.В.Романов. — М.: Научный мир, 2020. — 184 с.
16. **Сумин, М.И.** *Некорректные задачи и методы их решения* / М.И.Сумин. — Н.Новгород: ННГУ, 2009. — 289 с.
17. **Сухарев, А.Г.** *Курс методов оптимизации* / А.Г.Сухарев, А.В.Тимохов, В.В.Федоров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 368 с.
18. **Тихонов, А.Н.** *Методы решения некорректных задач* / А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. — М.: Наука, 1986. — 160 с.
19. **Тихонов А.Н., Гласко В.Б.** *Применение метода регуляризации в нелинейных задачах* // ЖВМиМФ. 1965. Т.5, №3. С.463–473.
20. **Тихонов, А.Н.** *Численные методы решения некорректных задач* / А.Н.Тихонов, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола. — М.: Наука, 1990. — 230 с.
21. **Треногин, В.А.** *Функциональный анализ* / В.А.Треногин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 488 с.
22. **Чернов, А.В.** *Линейная алгебра и функциональный анализ: основы теории и примеры решения задач* / А.В.Чернов. — Н.Новгород: НГТУ, 2010. — 100 с.
23. **Чернов, А.В.** *О явном выражении решения регуляризирующей по Тихонову задачи оптимизации через параметр регуляризации в конечномерном случае* // Известия института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 60. С.90–110.
24. **Ягола, А.Г.** *Обратные задачи и методы их решения, приложения к геофизике* / А.Г.Ягола, Ван Янфей, И.Э.Степанова, В.Н.Титаренко. — М.: Лаборатория знаний, 2021. — 219 с.

Андрей Владимирович **Чернов**

Практикум по некорректным задачам

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.