Министерство
общего и профессионального образования
Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

Механико-математический факультет
Кафедра геометрии и высшей алгебры

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Часть I

Нижний Новгород, 2004

УДК 515.1

Тензорная алгебра. Часть I / Сост. А.В.Баландин, О.А.Муляр, А.Г.Разуваев. - Н.Новгород: ННГУ, 2004.

Методическая разработка предназначена для студентов 1-го курса механико-математического факультета. Она посвящена тензорной алгебре, являющейся разделом курса "Линейная алгебра и геометрия".

Составители: доцент А.В.Баландин,
ассистент О.А.Муляр,
доцент А.Г.Разуваев.

Рецензенты: доцент кафедры ЧиФА ф-та ВМК ННГУ,
к.ф-м.н. А.И. Гавриков,
доцент кафедры прикладной математики НГТУ,
к.ф-м.н. Г.В. Потемин.

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
2004

1. Двойственное векторное пространство

В настоящей работе все векторные пространства предполагаются конечномерными векторными пространствами над полем P нулевой характеристики.

Определение 1. *Линейной функцией на векторном пространстве* V называется отображение $f : V \to P$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1.\ f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V,$$

$$2.\ f(a\overrightarrow{x}) = af(\overrightarrow{x}) \qquad \forall \overrightarrow{x} \in V \quad \forall a \in P.$$

Линейная функция на V также называется *линейным функционалом*, *1-формой* или *ковектором на* V.

Замечание 1. Условия 1 и 2 определения 1 эквивалентны следующему

$$f(a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y}) = af(\overrightarrow{x}) + bf(\overrightarrow{y}) \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V,\ \forall a, b \in P.$$

Замечание 2. Само поле P является 1-мерным векторным пространством над P. Действительно, любой ненулевой элемент $a \in P$ определяет базис $B = \{a\}$, поскольку для любого $b \in P$ будем иметь равенство $b = \frac{b}{a}a$. С этой точки зрения линейные функции на V – это линейные отображения из V в P.

Замечание 3. Линейная функция (как и линейное отображение векторных пространств) определяется единственным образом своими значениями на векторах какого-либо базиса (см., например, [1]).

Пример 1. Пусть R^n – n-мерное арифметическое векторное пространство, т.е. $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R\}$. Тогда для любого $i = \overline{1, n}$ отображение $f_i : (x_1, x_2, ..., x_n) \to x_i$ является линейной функцией на R^n.

Пример 2. Функция $\alpha(f) = f'(x_0),\ x_0 \in R$, является линейной функцией на пространстве $C^1(R)$ дифференцируемых функций на вещественной прямой.

Пример 3. Функция $f(A) = tr\ A$, где $tr\ A$– след матрицы A, является линейной на пространстве $M_n(P)$ квадратных матриц.

Определение 2. Пространство всех линейных функционалов на V называется *двойственным к* V пространством и обозначается V^*. Двойственное пространство также называется *сопряженным* или *дуальным.* Аналогичным образом пространство всех линейных функционалов на V^* называется *дважды двойственным к* V пространством и обозначается V^{**}.

Замечание 4. Теперь, очевидно, можно определить бесконечную последовательность пространств $V^{***}, V^{****}, ...$

Теорема 1. *$dim\ V = dim\ V^*$.*

Доказательство. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ – базис в пространстве V. Тогда для любого $i = 1, ..., n$ существует единственная линейная функция $f_i : V \to P$, удовлетворяющая равенствам: $f_i(\overrightarrow{e_j}) = \delta_{ij}$ (см. замечание 3). Здесь δ_{ij} - символ Кронекера, т.е. δ_{ij} – коэффициенты единичной матрицы

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Покажем, что линейные функции f_i образуют базис в пространстве V^*. Проверим, что выполнено первое условие базиса, т.е. что любой линейный функционал на V можно представить как линейную комбинацию ковекторов f_i. Пусть $\phi \in V^*$ и $\phi(\overrightarrow{e_i}) = a_i$. Рассмотрим линейный функционал ψ на V, определенный равенством $\psi = \sum_{j=1}^n a_j f_j$. Вычисляя значения функций ϕ и ψ на произвольном векторе $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{e_i}$, имеем равенства:

$$\phi(\overrightarrow{x}) = \phi(\sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(\overrightarrow{e_i})) = \sum_{i=1}^n x_i a_i,$$

$$\psi(\overrightarrow{x}) = \psi(\sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^n x_i \psi(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^n a_j f_j(\overrightarrow{e_i})) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^n a_j \delta_{ji}) = \sum_{i=1}^n x_i a_i.$$

Отсюда следует, что функционалы ψ и ϕ совпадают. Значит, функционал ϕ, так же как и ψ, допускает разложение по ковекторам f_i.

Линейную независимость ковекторов f_i докажем методом от противного. Пусть f_i линейно зависимы, т.е. существуют $a_j \in P$, не все равные нулю, такие, что $\sum_{j=1}^n a_j f_j = 0$. Последнее означает, что

$$\sum_{j=1}^n a_j f_j(\overrightarrow{x}) = 0, \ \forall \overrightarrow{x} \in V. \tag{1}$$

Подставляя $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_k}$ в (1), имеем $\sum_{j=1}^n a_j f_j(\overrightarrow{e_k}) = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{jk} = a_k = 0$. Заметим, что аналогичное равенство можно получить для любого $k = 1, ..., n$. Получаем противоречие с нетривиальностью линейной комбинации (1). Q.E.D.

Базис, построенный при доказательстве теоремы, далее будет часто использоваться. Поэтому оказывается полезным

Определение 3. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ – базис в пространстве V. Тогда базис $B_{V^*} = \{f_1, ..., f_n\}$ такой, что $f_i(\overrightarrow{e_k}) = \delta_{ik}$, называется *двойственным*, *сопряженным* или *дуальным к базису* B_V.

Теорема 2. Пусть C – матрица перехода от базиса $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ к базису $B'_V = \{\overrightarrow{e_1}', ..., \overrightarrow{e_n}'\}$ в пространстве V. Обозначим $B_{V^*} = \{f_1, ..., f_n\}$ и $B'_{V^*} = \{f'_1, ..., f'_n\}$ базисы, двойственные к B_V и B'_V соответственно. Тогда $(C^{-1})^t$ является матрицей перехода от B_{V^*} к B'_{V^*}.

Доказательство. По условию $\overrightarrow{e_i}' = \sum_{j=1}^n c_{ji} \overrightarrow{e_j}$. Пусть D – матрица перехода от базиса $B_{V^*} = \{f_1, ..., f_n\}$ к базису $B'_{V^*} = \{f'_1, ..., f'_n\}$, т.е. $f'_j = \sum_{i=1}^n d_{ij} f_i$. Найдем зависимость между матрицами C и D. Из условия двойственности базисов B'_V и B'_{V^*} имеем равенство:

$$\delta_{ik} = f'_i(\overrightarrow{e_k}') = \sum_{s=1}^n d_{si} f_s(\overrightarrow{e_k}') = \sum_{s=1}^n d_{si} f_s(\sum_{p=1}^n c_{pk} \overrightarrow{e_p}) =$$

$$= \sum_{s=1}^n d_{si} (\sum_{p=1}^n c_{pk} f_s(\overrightarrow{e_p})) = \sum_{s=1}^n d_{si} (\sum_{p=1}^n c_{pk} \delta_{sp}) = \sum_{s=1}^n d_{si} c_{sk}. \tag{2}$$

Обозначим $D^t = ||d^t_{ij}||$ матрицу, транспонированную к матрице $D = ||d_{ij}||$. Тогда равенство (2) принимает вид:

$$\delta_{ik} = \sum_{s=1}^{n} d_{si} c_{sk} = \sum_{s=1}^{n} d_{is}^{t} c_{sk} = (D^t C)_{ik}.$$

Следовательно, $E = D^t C$ и $D = (C^{-1})^t$. Q.E.D.

Замечание 5. Из теоремы 1 следует, что пространства V и V^* являются изоморфными. Аналогичным образом, нетрудно видеть, что все векторные пространства $V, V^*, V^{**}, V^{***}, ...$ изоморфны между собой.

Нас будет далее интересовать следующий специальный класс изоморфизмов.

Определение 4. Векторные пространства называются *канонически изоморфными*, если между ними можно установить изоморфизм, не зависящий от выбора базисов.

Теорема 3. Пространства V и V^{**} являются канонически изоморфными.

Доказательство. Определим отображение $F : V \to V^{**}$, которое вектору $\overrightarrow{x}$ ставит в соответствие $F_{\overrightarrow{x}} \in V^{**}$, при помощи следующего равенства:

$$F_{\overrightarrow{x}}(g) = g(\overrightarrow{x}), \ \ \forall g \in V^*.$$

Так как в определении F базисы векторных пространств не участвуют, то отсюда следует каноничность отображения F. Осталось доказать, что F – изоморфизм векторных пространств.

Линейность F проверяется непосредственно. Действительно, для любого ковектора $g \in V^*$ имеем равенства:

$$F_{\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}}(g) = g(\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}) = \alpha g(\overrightarrow{x}) + \beta g(\overrightarrow{y}) = \alpha F_{\overrightarrow{x}}(g) + \beta F_{\overrightarrow{y}}(g).$$

Здесь первое равенство записано на основе определения отображения F, второе равенство следует из линейности ковектора g, а третье – опять из определения F.

Чтобы убедиться в биективности F, выберем в V и V^* двойственные базисы $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ и $B_{V^*} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Тогда из определения F следуют равенства

$$F_{\overrightarrow{e_j}}(f_i) = f_i(\overrightarrow{e_j}) = \delta_{ij}. \tag{3}$$

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что ковекторы f_i, удовлетворяющие условию (3), образуют базис в двойственном пространстве V^*. Рассматривая теперь дважды двойственное пространство V^{**}, из (3) получаем, что $\{F_{\overrightarrow{e_1}}, \ldots, F_{\overrightarrow{e_n}}\}$ – базис V^{**}, двойственный к $B_{V^*} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Таким образом, линейная оболочка $< F_{\overrightarrow{e_1}}, \ldots, F_{\overrightarrow{e_n}} >= V^{**}$, что означает сюръективность отображения F. Теперь из формулы $dim\ V = dim\ Ker\ F + dim\ Im\ F$ следует, что $dim\ Ker\ F = 0$. Тем самым инъективность доказана. Q.E.D.

Замечание 6. С учетом построенного изоморфизма обычно отож- дествляют соответствующие элементы пространств V и V^{**}, полагая $\overrightarrow{x} \equiv F(\overrightarrow{x}) \in V^{**}$. Таким образом, если f – ковектор, то имеет смысл выражение $\overrightarrow{x}(f)$ и $\overrightarrow{x}(f) = f(\overrightarrow{x})$.

Пример 4. Рассмотрим пример неканонического изоморфизма пространств V и V^*. Выберем в пространстве V базис $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$. Пусть $B_{V^*} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ – базис двойственный к базису B_V.

Зададим изоморфизм $F : V \to V^*$ равенствами:

$$F(\overrightarrow{e_i}) = f_i, \ i = \overline{1, n} \tag{4}$$

(такой изоморфизм определен единственным образом, см. замечание 3.). Тогда для любого вектора $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$ имеем равенство: $F(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i F(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, т.е. любому вектору ставится в соответствие ковектор с теми же координатами относительно двойственного базиса.

Проверим, что F зависит от выбора базиса B_V, т.е. не является каноническим. Другими словами, если F задать в другом базисе при помощи равенств, аналогичных равенствам (4), то получим другое линейное отображение. Рассмотрим еще одну пару двойственных базисов $B'_V = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', ..., \overrightarrow{e_n}'\}$ и $B'_{V^*} = \{f'_1, f'_2, ..., f'_n\}$ и изоморфизм $F' : V \to V^*$, заданный равенствами: $F'(\overrightarrow{e_i}') = f'_i$. Тогда для отображения F', так же как и для F, получим равенство $F'(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=k}^{n} x'_k f'_k$, где x'_k – координаты вектора $\overrightarrow{x}$ относительно базиса B'_V.

Пусть $C = ||c_{ij}||$ – матрица перехода от B_V к B'_V, т. е. $\overrightarrow{e_i}' = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \overrightarrow{e_j}$.

Теперь равенства $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{e_j} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \overrightarrow{e_k}' = \sum_{k=1}^{n} x'_k (\sum_{j=1}^{n} c_{jk} \overrightarrow{e_j}) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} x'_k c_{jk}) \overrightarrow{e_j}$ приводят к известным формулам, связывающим координаты векторов в разных базисах: $x_j = \sum_{k=1}^{n} x'_k c_{jk}$. Подставляя эти соотношения в выражение для $F(\overrightarrow{x})$, приходим к равенству: $F(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} x'_k c_{ik}) f_i$. В то же время, учитывая соотношения $f'_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} f_i$, находим

$$F'(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=k}^{n} x'_k f'_k = \sum_{i=k}^{n} x'_k (\sum_{i=1}^{n} d_{ik} f_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{i=k}^{n} x'_k d_{ik}) f_i.$$

Отсюда получаем, что равенство $F(\overrightarrow{x}) = F'(\overrightarrow{x})$ при любом $\overrightarrow{x}$ возможно тогда и только тогда, когда $c_{ik} = d_{ik}$. Однако из теоремы 3 следует равенство $D^t = C^{-1}$. Таким образом, изоморфизмы F и F', вообще говоря, различны и совпадают только для матриц, удовлетворяющих условию $C^t = C^{-1}$, т.е. только для ортогональных матриц.

2. Тензорные обозначения

Далее, чтобы использовать матричную запись формул, будет полезно перейти к новым *тензорным* обозначениям.

1. Обозначения Эйнштейна. Если в некоторой формуле один и тот же индекс встречается два раза, причем один раз как верхний и один раз как нижний, то по этому индексу предполагается суммирование. Например, вместо $\sum_{i=1}^{n} x^i y_i$ будем писать $x^i y_i$. Аналогично, выражение $\sum_{i=1}^{n} x_k^i y_i$ заменим на $x_k^i y_i$, и так далее. Поэтому будет удобно записывать координаты векторов с верхними индексами, т.е. вместо $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$ будем писать $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \overrightarrow{e_i}$. Тогда с учетом обозначений Эйнштейна последнее равенство принимает вид $\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i}$.

Далее всегда, если не указано дополнительно, подразумевается суммирование от 1 до $dim\ V$.

2. В матрицах перехода от одного базиса к другому в пространстве V вместо двух нижних индексов будем использовать один верхний и один нижний, причем верхний индекс соответствует номеру строки, а нижний – номеру столбца.

Таким образом, равенства $\overrightarrow{e_i}' = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \overrightarrow{e_j}$ будем записывать как $\overrightarrow{e_i}' = \sum_{j=1}^{n} c_i^j \overrightarrow{e_j}$. Последние равенства, учитывая обозначения Эйнштейна, принимают вид:

$$\overrightarrow{e_i}' = c_i^j \overrightarrow{e_j}. \qquad (5)$$

3. Пусть в пространстве V выбран некоторый базис $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$. Ковекторы двойственного базиса в пространстве V^* будем нумеровать при помощи верхних индексов, а именно, положим $B_{V^*} = \{f^1, f^2, ..., f^n\}$. Тогда по определению двойственного базиса получим равенства: $f^j(\overrightarrow{e_i}) = \delta^i_j$, где δ^i_j – по-прежнему единичная матрица, т.е.

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} .$$

Выберем еще один базис $B'_V = \{\overrightarrow{e_1}', ..., \overrightarrow{e_n}'\}$ в пространстве V и положим $\overrightarrow{e_i}' = c^j_i \overrightarrow{e_j}$. Пусть $B'_{V^*} = \{f'^1, ..., f'^n\}$ – двойственный базис к базису B'_V. Используя обозначения Эйнштейна, разложение f'^i по ковекторам $\{f^i\}$ запишем в следующем виде

$$f'^i = q^i_j f^j. \tag{6}$$

Важно отметить, что теперь матрица $Q = ||q^i_j||$ не является матрицей перехода от B_{V^*} к B'_{V^*}. В самом деле, для матрицы Q координатами векторов f'^i относительно "старого" базиса B_{V^*} являются строки, а не столбцы, как это должно быть для матрицы перехода. Таким образом, матрица Q является транспонированной по отношению к матрице перехода для базисов B_{V^*} и B'_{V^*} . Поэтому из теоремы 2 следует равенство

$$Q = C^{-1}. \tag{7}$$

4. Для коэффициентов матрицы перехода C от B_V к B'_V будем использовать обозначение $c^j_{i'}$ вместо c^j_i. Также будем ставить штрих над индексами векторов "нового" базиса. Тогда равенства (5) принимают вид:

$$\overrightarrow{e_{i'}} = c^j_{i'} \overrightarrow{e_j}. \tag{8}$$

Для коэффициентов матрицы Q и для ковекторов "нового" базиса штрих будем ставить над верхним индексом. Поэтому равенства (6) можно переписать в виде:

$$f^{i'} = q^{i'}_j f^j. \tag{9}$$

Далее, чтобы воспользоваться обозначениями Эйнштейна, будем ставить штрих также над индексами "новых" координат векторов и ковекторов. Тогда разложение вектора запишется следующим образом:

$$\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i} = x^{i'} \overrightarrow{e_{i'}}. \tag{10}$$

Координаты ковекторов будем нумеровать при помощи нижних индексов. Поэтому аналогичные равенства для ковектора f имеют вид:

$$f = y_i f^i = y_{i'} f^{i'}. \tag{11}$$

5. Далее вместо коэффициентов $q^{i'}_j$ будем записывать $c^{i'}_j$. Тогда, как следует из равенства (7), штрих над верхним индексом в матрице $||c^{i'}_j||$ используется для обозначения матрицы, обратной к матрице C, т.е. $||c^{i'}_j|| = C^{-1}$. В то же время, штрих над нижним индексом в матрице $||c^i_{j'}||$ служит, по-прежнему, для обозначения самой матрицы перехода, т.е. $||c^i_{j'}|| = C$.

Важно отметить, что теперь при транспонировании матриц $||c_j^{i'}||$ и $||c_{j'}^i||$, вообще говоря (за исключением случая ортогональной матрицы C), нельзя поменять местами верхний и нижний индексы матрицы C.

6. В тензорной алгебре индекс, по которому предполагается суммирование, называется *немым* и допускает замену другим индексом, поскольку при такой замене результат суммирования останется прежним. Отметим, что в соответствии с нашими обозначениями, вообще говоря, нельзя заменять штрихованные индексы на индексы без штрихов и наоборот.

Окончательно, с учетом новых обозначений, формулы перехода от B_V к B'_V и от B_{V^*} к B'_{V^*} принимают вид:

$$\overrightarrow{e_{i'}} = c_{i'}^j \overrightarrow{e_j}, \qquad f^{i'} = c_j^{i'} f^j, \tag{12}$$

где

$$c_{i'}^j c_k^{i'} = \delta_k^j, \qquad c_k^{i'} c_{j'}^k = \delta_{j'}^{i'}. \tag{13}$$

Выясним теперь, какой вид имеют формулы (**??**) с учетом новых обозначений.

Из равенств (10) и (12) следует, что $x^i \overrightarrow{e_i} = x^{i'} c_{i'}^j \overrightarrow{e_j}$. Отсюда приходим к равенству:

$$c_{i'}^j x^{i'} = x^j. \tag{14}$$

Умножая обе части равенства (14) на матрицу, обратную к C, получим $c_j^{k'} c_{i'}^j x^{i'} = c_j^{k'} x^j$. Теперь, учитывая формулы (13), левую часть последнего равенства перепишем в виде $c_j^{k'} c_{i'}^j x^{i'} = \delta_{i'}^{k'} x^{i'} = x^{k'}$. Отсюда получаем:

$$x^{k'} = c_j^{k'} x^j. \tag{15}$$

Аналогичные рассуждения для координат y_i ковекторов приводят к равенствам:

$$c_k^{i'} y_{i'} = y_k, \qquad y_{i'} = c_{i'}^k y_k. \tag{16}$$

3. Тензоры. Координаты тензора

Обобщение понятия линейного отображения векторных пространств приводит к следующему классу отображений.

Определение 5. Пусть $V_1, V_2, ..., V_k, W$ – векторные пространства над полем P. Отображение $f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_k \to W$ называется *полилинейным* или *k-линейным* отображением, если оно линейно по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных аргументов, т.е. для каждого индекса $j = \overline{1,n}$ и для любого фиксированного набора векторов $v_i \in V_i,\ i = \overline{1,n},\ i \neq j$ выполнено условие:

$$f(v_1, v_2, ..., \alpha v'_j + \beta v''_j, ..., v_n) = \alpha f(v_1, v_2, ..., v'_j, ..., v_n) + \beta f(v_1, v_2, ..., v''_j, ..., v_n),$$

$\forall v'_j, v''_j \in V_j$ и $\forall \alpha, \beta \in P$.

Если $n = 2$, то полилинейное отображение называется также *билинейным.*

Если $W = P$, то полилинейное отображение называется *полилинейной* функцией или *полилинейной* формой.

Замечание 7. Множество всех полилинейных отображений из $V_1 \times V_2 \times ... \times V_k \to W$ образует векторное пространство относительно обычных операций сложения отображений и умножения на $\alpha \in P$.

Пример 5. Пусть $V_1 = V_2 = ... = V_n = V,\ W = P$. Обозначим $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ координаты вектора $\overrightarrow{a_i}$ относительно некоторого фиксированного базиса B_V в пространстве V. Рассмотрим отображение

$$det : V \times V \times ... \times V \to P : (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}) \to det||a_{ij}||.$$

Тогда из свойств определителя следует, что отображение det определяет полилинейную функцию.

Определение 6. Пусть V – векторное пространство и V^* – двойственное к нему векторное пространство. *Тензором t типа (p, q) на векторном пространстве V* называется полилинейная функция

$$t : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q} \to P.$$

Множество всех тензоров типа (p, q) будем обозначать $T_p^q(V)$. Пару неотрицательных чисел (p, q) называют *валентностью тензора.*

Для удобства обозначений пространство T_0^0 часто отождествляют с полем P.

Пример 6. Элементами пространства $T_1^0(V)$ являются линейные функции на V. Поэтому пространство $T_1^0(V)$ совпадает с V^*.

Пример 7. Рассмотрим пространство $T_0^1(V)$. Его элементами являются линейные функции $t : V^* \to P$, т.е. $T_0^1(V) = V^{**}$. С учетом канонического изоморфизма $V^{**} \cong V$ получаем, что $T_0^1(V) \cong V$.

Пример 8. Пусть f линейный оператор в пространстве V. Определим отображение $t_f : V \times V^* \to P$ следующим равенством $t_f(\overrightarrow{x}, y) = y(f(\overrightarrow{x}))$. Тогда из линейности y и f следует, что t_f является тензором типа $(1, 1)$ на векторном пространстве V.

Более того, покажем, что каждый тензор типа $(1, 1)$ можно получить подобным образом. Действительно, пусть $t \in T_1^1(V)$, т.е. $t : V \times V^* \to P$ – билинейная функция. Тогда для любого фиксированного $\overrightarrow{x} \in V$ отображение $t_x : V^* \to P$, определенное условием $t_x(y) = t(\overrightarrow{x}, y)$ является линейным, и следовательно, $t_x \in V^{**}$. С учетом канонического изоморфизма пространств V и V^{**} отождествим t_x с вектором $\overrightarrow{t(x)}$, при этом имеем равенство $\overrightarrow{t(x)}(y) = t(\overrightarrow{x}, y)$. Определим отображение $f : V \to V$ следующим равенством $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{t(x)}$. Теперь линейность отображения f следует из линейности канонического изоморфизма и отображения t. Таким образом, приходим к равенствам $t(\overrightarrow{x}, y) = \overrightarrow{t(x)}(y) = f(\overrightarrow{x})(y) = y(f(\overrightarrow{x}))$.

Отметим, что указанная биекция между векторным пространством линейных операторов на V и векторным пространством тензоров $T_1^1(V)$ является линейным отображением и тем самым данная биекция – изоморфизм. При этом, поскольку в определении биекции базисы не участвуют, то данное соответствие – канонический изоморфизм.

Определение 7. Пусть на векторном пространстве V задан тензор $t \in T_p^q(V)$. Выберем в пространстве V некоторый базис $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ и двойственный к нему базис $B_{V^*} = \{f^1, ..., f^n\}$. Набор n^{p+q} чисел $t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}$, определенный равенствами

$$t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q} = t(\overrightarrow{e_{i_1}}, ..., \overrightarrow{e_{i_p}}, f^{j_1}, ... f^{j_q})$$

называется *координатами* или *компонентами тензора* t *относительно базиса* B_V. Здесь все индексы $i_1, i_2, ..., i_p, j_1, j_2, ..., j_q$ принимают значения от 1 до n.

Теорема 4. Значение тензора $t \in T_p^q(V)$ на наборе аргументов

$$(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q)$$

определяется координатами тензора t относительно базиса B_V, а также координатами всех векторов $\overrightarrow{x_i}$ относительно базиса B_V и координатами всех ковекторов y^j относительно двойственного базиса B_{V^*}.

Доказательство. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ и $B_{V^*} = \{f^1, ..., f^n\}$. Обозначим $x_k^{i_k}$ координаты вектора $\overrightarrow{x_k}$ $(k = \overline{1,p})$ и $y_{j_s}^s$ координаты ковектора y^s $(s = \overline{1,q})$ относительно базисов B_V и B_{V^*} соответственно. Из полилинейности тензора t получим равенства:

$$t(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q) = t(x_1^{i_1}\overrightarrow{e_{i_1}}, x_2^{i_2}\overrightarrow{e_{i_2}}, ..., x_p^{i_p}\overrightarrow{e_{i_p}}, y_{j_1}^1 f^{j_1}, y_{j_2}^2 f^{j_2}, ..., y_{j_q}^q f^{j_q}) =$$

$$= x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_p^{i_p} y_{j_1}^1 y_{j_2}^2 ... y_{j_q}^q t(\overrightarrow{e_{i_1}}, \overrightarrow{e_{i_2}}, ..., \overrightarrow{e_{i_p}}, f^{j_1}, f^{j_2}, ..., f^{j_q}) =$$

$$= x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_p^{i_p} y_{j_1}^1 y_{j_2}^2 ... y_{j_q}^q t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}.$$

Q.E.D.

Теорема 5. Пусть $t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}$ координаты тензора $t \in T_p^q(V)$ относительно базиса B_V и $t_{i'_1 i'_2 ... i'_p}^{j'_1 j'_2 ... j'_q}$ его координаты относительно базиса B'_V. Если $C = ||c_{i'}^j||$ является матрицей перехода в векторном пространстве V от базиса B_V к базису B'_V, то справедливы равенства:

$$t_{i'_1 i'_2 ... i'_p}^{j'_1 j'_2 ... j'_q} = c_{i'_1}^{i_1} c_{i'_2}^{i_2} ... c_{i'_p}^{i_p} c_{j_1}^{j'_1} c_{j_2}^{j'_2} ... c_{j_q}^{j'_q} t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}. \tag{17}$$

Доказательство. Из определения координат тензора будем иметь

$$t_{i'_1 i'_2 ... i'_p}^{j'_1 j'_2 ... j'_q} = t(\overrightarrow{e_{i'_1}}, ..., \overrightarrow{e_{i'_p}}, f^{j'_1}, ...f^{j'_q}) = t(c_{i'_1}^{i_1}\overrightarrow{e_{i_1}}, ..., c_{i'_p}^{i_p}\overrightarrow{e_{i_p}}, c_{j_1}^{j'_1} f^{j_1}, ...c_{j_q}^{j'_q} f^{j_q}) =$$

$$= c_{i'_1}^{i_1} c_{i'_2}^{i_2} ... c_{i'_p}^{i_p} c_{j_1}^{j'_1} c_{j_2}^{j'_2} ... c_{j_q}^{j'_q} t(\overrightarrow{e_{i_1}}, ..., \overrightarrow{e_{i_p}}, f^{j_1}, ...f^{j_q}) = c_{i'_1}^{i_1} c_{i'_2}^{i_2} ... c_{i'_p}^{i_p} c_{j_1}^{j'_1} c_{j_2}^{j'_2} ... c_{j_q}^{j'_q} t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}.$$

Q.E.D.

Замечание 8. Из теоремы 5 следует, что для определения координат тензора относительно произвольного базиса достаточно знать его координаты относительно одного какого-либо базиса.

Замечание 9. В теореме 5 и далее для координат тензора в "новом" базисе B'_V используются обозначения $t_{i'_1 i'_2 ... i'_p}^{j'_1 j'_2 ... j'_q}$ аналогично обозначениям координат $x^{i'}$ и $y_{i'}$ для векторов и ковекторов.

Оказывается, что справедливо и обратное к теореме 5 утверждение, а именно:

Теорема 6. Пусть каждому базису B_V в n-мерном векторном пространстве V сопоставлен набор n^{p+q} чисел $t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}$, причем данные наборы связаны равенствами (17), если $c_{i'}^i$ – матрица перехода от базиса B_V к базису B'_V. Тогда существует единственный тензор t типа (p, q) на векторном пространстве V, для которого $t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}$ являются координатами относительно B_V.

Доказательство. Пусть базису B_V сопоставлен набор $t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}$. Определим отображение $t : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q} \to P$ при помощи равенства:

$$t(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_p^{i_p} y_{j_1}^1 y_{j_2}^2 ... y_{j_q}^q t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}, \tag{18}$$

где $x_k^{i_k}$ координаты вектора $\overrightarrow{x_k}$ и $y_{j_k}^k$ координаты ковектора y^k относительно базисов B_V и B_{V^*} соответственно.

Докажем корректность определения отображения t при помощи формулы (18), т.е. независимость отображения t от выбора базиса.

Пусть B'_V – некоторый другой базис в пространстве V и ему сопоставлен набор чисел $t_{i'_1 i'_2 ... i'_p}^{j'_1 j'_2 ... j'_q}$, причем $c_{i'}^{i}$ – матрица перехода от B_V к B'_V.

Рассмотрим функцию t', определенную равенством

$$t'(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q) = x_1^{i'_1} x_2^{i'_2} ... x_p^{i'_p} y_{j'_1}^1 y_{j'_2}^2 ... y_{j'_q}^q t_{i'_1 i'_2 ... i'_p}^{j'_1 j'_2 ... j'_q},$$

где $x_k^{i'_k}$ и $y_{j'_s}^s$ – координаты вектора $\overrightarrow{x_k}$ и ковектора y^s относительно базисов B'_V и B'_{V^*}.

Покажем, что $t'(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q) = t(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q)$ при всех значениях аргументов. Для этого перепишем формулы (15) и (16), по которым преобразуются координаты векторов и ковекторов при замене базиса, в следующем виде:

$$x_k^{r'_k} = c_{r_k}^{r'_k} x_k^{r_k}, \quad y_{s'_k}^s = c_{s'_k}^{s_k} y_{s_k}^s.$$

Теперь приходим к следующим равенствам:

$$t'(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q) = x_1^{r'_1} x_2^{r'_2} ... x_p^{r'_p} y_{s'_1}^1 y_{s'_2}^2 ... y_{s'_q}^q t_{r'_1 r'_2 ... r'_p}^{s'_1 s'_2 ... s'_q} =$$

$$= c_{r_1}^{r'_1} x_1^{r_1} ... c_{r_p}^{r'_p} x_p^{r_p} c_{s'_1}^{s_1} y_{s_1}^1 ... c_{s'_q}^{s_q} y_{s_q}^q t_{r'_1 r'_2 ... r'_p}^{s'_1 s'_2 ... s'_q} =$$

$$= x_1^{r_1} x_2^{r_2} ... x_p^{r_p} y_{s_1}^1 y_{s_2}^2 ... y_{s_q}^q c_{r_1}^{r'_1} ... c_{r_p}^{r'_p} c_{s'_1}^{s_1} ... c_{s'_q}^{s_q} c_{r'_1}^{i_1} c_{r'_2}^{i_2} ... c_{r'_p}^{i_p} c_{j_1}^{s'_1} c_{j_2}^{s'_2} ... c_{j_q}^{s'_q} t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q} =$$

$$= x_1^{r_1} x_2^{r_2} ... x_p^{r_p} y_{s_1}^1 y_{s_2}^2 ... y_{s_q}^q \delta_{r_1}^{i_1} \delta_{r_2}^{i_2} ... \delta_{r_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{s_1} \delta_{j_2}^{s_2} ... \delta_{j_q}^{s_q} t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q} = x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_p^{i_p} y_{j_1}^1 y_{j_2}^2 ... y_{j_q}^q t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}.$$

Отсюда видно, что значения функций t и t' совпадают при любых значениях аргументов. Тем самым корректность определения отображения t доказана.

Полилинейность отображения t следует непосредственно из равенства (18). Q.E.D.

Теоремы 5 и 6 показывают, что тензор единственным образом определяется его координатами. Таким образом, тензоры типа (p, q) в векторном пространстве V размерности n находятся во взаимно-однозначном соответствии с их координатами, т.е. с наборами $n^{(p+q)}$ чисел $t_{i_1 i_2 ... i_p}^{j_1 j_2 ... j_q}$, которые при изменении базиса преобразуются по формулам (17). Такое взаимно-однозначное соответствие позволяет указать другой подход к понятию тензора, который также часто встречается в литературе. При таком подходе тензор определяется следующим образом.

Определение 8. Пусть каждому базису B_V в n-мерном пространстве V сопоставлен набор n^{p+q} чисел $t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$, удовлетворяющий следующему условию: наборы чисел $t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ и $t^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}$ для базисов B_V и B'_V связаны равенствами (17), если $c^i_{i'}$ – матрица перехода от базиса B_V к базису B'_V. Тогда говорят, что на векторном пространстве V задан *тензор* t *типа* (p,q). Тензор t типа (p,q) также называют *p-раз ковариантным* и *q-раз контравариантным* тензором, при этом нижние индексы называются *ковариантными*, а верхние - *контравариантными*.

Пример 9. Рассмотрим с точки зрения определения 8 тензоры типа $T^0_1(V)$. Пусть каждому базису в n-мерном векторном пространстве V сопоставлен набор n чисел y_i, причем для разных базисов B_V и B'_V соответствующие наборы связаны равенствами

$$y_{i'} = c^i_{i'} y_i,$$

где $c^i_{i'}$ – матрица перехода от базиса B_V к базису B'_V. Тем самым, в соответствии с определением 8 на векторном пространстве V задан тензор типа $T^0_1(V)$.

Чтобы установить связь между двумя определениями тензора, так же как при доказательстве теоремы 6 определим соответствующую этому тензору полилинейную функцию $t : V \to P$, полагая $t(\overrightarrow{x}) = y_i x^i$, где x^i – координаты вектора $\overrightarrow{x}$ относительно базиса B_V.

4. Тензорное произведение тензоров.

Определение 9. *Тензорным произведением тензоров* $t \in T^{q_1}_{p_1}(V)$ *и* $s \in T^{q_2}_{p_2}(V)$ называется тензор $t \otimes s \in T^{q_1+q_2}_{p_1+p_2}(V)$, определенный условием

$$t \otimes s(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x}_{p_1+p_2}, y^1, ...y^{q_1+q_2}) =$$

$$= t(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x}_{p_1}, y^1, ...y^{q_1}) s(\overrightarrow{x}_{p_1+1}, ..., \overrightarrow{x}_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, ...y^{q_1+q_2})$$

при всех $\overrightarrow{x_i} \in V$, $y^j \in V^*$.

Замечание 10. Из определения 7 и свойств поля непосредственно следуют свойства ассоциативности и дистрибутивности тензорного произведения тензоров.

Определение 10. Тензор $t \in T^q_p(V)$, для которого существует набор из p векторов $\overrightarrow{x_i}$ и q ковекторов y^j таких, что $t = y^{j_1} \otimes y^{j_2} \otimes ... \bigotimes y^{j_q} \otimes \overrightarrow{x_{i_1}} \otimes \overrightarrow{x_{i_2}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{x_{i_p}}$ называется *разложимым*.

Теорема 7. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ и $B_{V^*} = \{f^1, ..., f^n\}$ двойственные базисы. Тогда базис в пространстве $T^q_p(V)$ образуют тензорные произведения вида $f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes ... \bigotimes f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{j_q}}$, где $i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q = \overline{1, n}$.

Доказательство. Сначала проверим, что любой тензор $t \in T^q_p(V)$ можно представить в виде линейной комбинации разложимых тензоров вида $f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes ... \bigotimes f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{j_q}}$. Действительно, пусть $t \in T^q_p(V)$ и $t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ – координаты t относительно базиса B_V. Составим линейную комбинацию

$$t' = t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes ... \otimes f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{j_q}}. \tag{19}$$

Вычисляя значения тензоров t и t' на произвольных наборах аргументов, имеем: $t'(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q) = t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes ... \otimes f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{j_q}}(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q) = t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1}(\overrightarrow{x_1}) f^{i_2}(\overrightarrow{x_2}) ... f^{i_p}(\overrightarrow{x_p}) \overrightarrow{e_{j_1}}(y^1) \overrightarrow{e_{j_2}}(y^2) ... \overrightarrow{e_{j_q}}(y^q) = t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} x^{i_1}_1 x^{i_2}_2 ... x^{i_p}_p y^1_{j_1} y^2_{j_2} ... y^q_{j_q} =$
$= t(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}, y^1, ...y^q)$. Тем самым показано, что $t = t'$.

Проверим линейную независимость указанных тензорных произведений. Рассуждая методом от противного, предположим что существуют коэффициенты $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}$, не все равные нулю, такие что

$$a = a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \ldots \otimes f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{j_q}} = 0. \qquad (20)$$

Последнее равенство означает, что функция a обращается в нуль для любого набора аргументов. Вычисляя значение функции a для набора аргументов $(\overrightarrow{e_{k_1}}, \ldots, \overrightarrow{e_{k_p}}, f^{r_1}, \ldots, f^{r_q})$, получаем:

$$0 = a(\overrightarrow{e_{k_1}}, \ldots, \overrightarrow{e_{k_p}}, f^{r_1}, \ldots f^{r_q}) =$$

$$= a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} f^{i_1}(\overrightarrow{e_{k_1}}) f^{i_2}(\overrightarrow{e_{k_2}}) \ldots f^{i_p}(\overrightarrow{e_{k_p}}) \overrightarrow{e_{j_1}}(f^{r_1}) \overrightarrow{e_{j_2}}(f^{r_2}) \ldots \overrightarrow{e_{j_q}}(f^{r_q}) =$$

$$= a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} \delta_{k_1}^{i_1} \delta_{k_2}^{i_2} \ldots \delta_{k_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{r_1} \delta_{j_2}^{r_2} \ldots \delta_{j_q}^{r_q} = a_{k_1 k_2 \ldots k_p}^{r_1 r_2 \ldots r_q}.$$

Таким образом, линейная комбинация (20) является тривиальной. Q.E.D.

Следствие 1. $dim T_p^q(V) = (dim V)^{p+q}$.

Доказательство получается подсчетом числа базисных векторов $f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \ldots \otimes f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{j_q}}$.

Замечание 11. Равенство (19) показывает, что коэффициенты разложения тензора $t \in T_p^q(V)$ по базису $f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \ldots \otimes f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{j_q}}$ совпадают с компонентами $t_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}$ тензора t относительно базиса B_V, т.е. компоненты тензора являются его координатами относительно базиса $f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \ldots f^{i_p} \otimes \overrightarrow{e_{j_1}} \otimes \overrightarrow{e_{j_2}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{j_q}}$.

Задачи.

Задача 1. Доказать, что множество линейных функционалов на V со значениями в P является подпространством в пространстве всех функций на векторном пространстве V со значениями в P.

Задача 2. Доказать, что если линейные функции на векторном пространстве имеют одинаковые ядра, то они отличаются множителем.

Задача 3. Являются ли ковекторами следующие функции на векторном пространстве $V = R^3$: 1) $F^1(\overrightarrow{x}) = 2x^1 - x^2 + 3x^3 + 5$, 2) $F^2(\overrightarrow{x}) = 3x^1 + (x^2)^2 - x^3$, 3) $F^3(\overrightarrow{x}) = x^1 + 4x^2 - x^3$. Для ковекторов найти их разложение по базису, двойственному к каноническому базису $B_V = \{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$.

Задача 4. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ и $B'_V = \{\overrightarrow{e_{1'}}, \overrightarrow{e_{2'}}\}$ – базисы в пространстве V. Найти матрицу перехода для двойственных базисов, если $\overrightarrow{e_{1'}} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_{2'}} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

Задача 5. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ и $B_{V^*} = \{f^1, f^2\}$ – двойственные базисы. Подпространство $V_1 \subset V$ задано уравнением: $f^1 - f^2 = 0$, т.е. $V_1 = \{\overrightarrow{x} \in V | (f^1 - f^2)(\overrightarrow{x}) = 0\}$. Найти уравнения этого подпространства в базисе, двойственном к базису $B'_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}\}$.

Задача 6. Пусть $V = \{f(x) \in R[x] | deg f(x) \leq 2\}$. Определим $g \in V^*$ равенством $g(f(x)) = \int_0^1 f(x)dx$. Выбрав какой-либо базис B_V в пространстве V, найти разложение ковектора g по базису, двойственному к B_V.

Задача 7. Пусть $V = \{g(x) \in R[x] | deg\ g(x) \leq n\}$.

1) Отображение $a^t : V \to R$ определено формулой: $a^t(g) = g(t)$, где $t \in R$. Доказать, что отображения $a^t, t = \overline{1, n+1}$ образуют базис в V^*.

2) Отображение $b^i : V \to R$ определено формулой: $b^i(g) = g^{(i)}(0)$, где $i \in N$ и $g^{(i)}(0)$ – i -ая производная функции $g(x)$ в точке 0. Доказать, что отображения $b^i, i = \overline{0,n}$ образуют базис в V^*.

3) Найти базисы в V двойственные к базисам, указанным в пунктах 1 и 2 данной задачи.

Задача 8. Доказать, что векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_k}$ в пространстве V линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют ковекторы $f^1, f^2, ..., f^k$ такие, что $det||f^j(\overrightarrow{e_i}|| \neq 0$.

Задача 9. Пусть tr функция следа на пространстве $V = M_n(R)$ всех квадратных матриц порядка n над полем R, т.е. $tr : X \to trX, X \in V$. доказать, что любая линейная функция на V имеет вид: $f(X) = tr(AX)$ для некоторой матрицы A.

Задача 10. Пусть $f, g \in V^*$ и $f \bigotimes g = g \bigotimes f$. Доказать, что $f = \lambda g$ для некоторого $\lambda \in P$.

Задача 11. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ и $B_{V^*} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ – двойственные базисы. Определим отображение $F : V \to V^*$ равенствами: $F(\overrightarrow{e_i}) = f_i,\ i = \overline{1,n}$. Доказать, что F является неканоническим изоморфизмом.

Задача 11. Решение. Такой изоморфизм определен единственным образом, см. замечание 3. Тогда для любого вектора $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{e_i}$ имеем равенство: $F(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^n x_i F(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$, т.е. любому вектору ставится в соответствие ковектор с теми же координатами относительно двойственного базиса.

Задача 11. Пусть F – линейный оператор в пространстве V. Определим оператор $F^* : V^* \to V^* : g \to F^*(g)$ следующим равенством: $F^*(g)(\overrightarrow{x}) = g(F(\overrightarrow{x}))$. Пусть $A = ||a_{ij}||$ – матрица оператора F относительно базиса B_V. Найти матрицу оператора F^* в базисе, двойственном к B_V.

Задача 12. Пусть F – линейное отображение пространства V в W. Определим отображение $F^* : W^* \to V^*$ формулой $F^*(g)(\overrightarrow{x}) = g(F(\overrightarrow{x})), \forall \overrightarrow{x} \in V,\ \forall g \in W^*$. Зная, что $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ – матрица линейного отображения F относительно базисов B_V и B_W, найти: a) образ ковектора $f = (1, -1)$; $b)$ матрицу отображения F^* относительно базисов $B_{V'}$ и $B_{W'}$, если $C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $C_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ – матрицы перехода к "новым" базисам.

Задача 13. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ – базис в пространстве V и $B_{V^*} = \{f^1, f^2, f^3\}$ - двойственный к нему базис. Зная, что $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ p = f^1 - f^2 + 3f^3,\ q = f^1 + 2f^2$, найти: 1) $p \otimes q(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$; 2) $\overrightarrow{y} \bigotimes \overrightarrow{x}(p, q)$.

Задача 14. Найти компоненты тензора $t = (\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) \bigotimes (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$ относительно базиса $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

Задача 15. Пусть $a = (1, 2, 3),\ b = (-2, 1, 0)$ относительно базиса B_V. Зная, что $f, g \in V^*$ и $f = (5, 0, 1),\ g = (1, 1, -2)$ относительно двойственного базиса к B_V, найти: $a)\ a \bigotimes b,\ b) a \bigotimes f,\ c) a \bigotimes f + b \bigotimes g,\ d) a \bigotimes b - b \bigotimes a$.

Задача 16. Пусть V – трехмерное евклидово пространство. Доказать, что отображение $t : V \times V \times V^* \to R : t(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, a) \to a([\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}])$ является тензором, здесь $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}]$ – векторное произведение векторов $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$. Найти координаты тензора t относительно базиса $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, в котором $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] = \overrightarrow{e_3},\ [\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] =$

$\overrightarrow{e_1}$, $[\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}] = \overrightarrow{e_2}$. Записать разложение тензора по базису.

Задача 17. Доказать, что $t : (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, y^1, y^2) = \begin{vmatrix} y^1(\overrightarrow{x_1}) & y^2(\overrightarrow{x_1}) \\ y^1(\overrightarrow{x_2}) & y^2(\overrightarrow{x_2}) \end{vmatrix}$ – тензор. Найти его координаты в каком-либо базисе и написать его разложение по базису.

Задача 18. Пусть $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ – базис в пространстве V и $B_{V^*} = \{f^1, f^2, f^3, f^4\}$ - двойственный к нему базис и $t = f^1 \otimes \overrightarrow{e_2} + f^2 \otimes \overrightarrow{e_3} + f^3 \otimes \overrightarrow{e_4}$. Найти:

1) все $y \in V^*$ такие, что $t(\overrightarrow{x}, y) = 0$ при всех $\overrightarrow{x} \in V$;

2) все $\overrightarrow{x} \in V$ такие, что $t(\overrightarrow{x}, y) = 0$ при всех $y \in V^*$.

Задача 19. Найти значение $t(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}, y, y)$, если все координаты тензора t равны 3 и $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3} + 4\overrightarrow{e_4}$, $y = f^1 - f^2$, где f^i – ковекторы базиса, двойственного к базису $\overrightarrow{e_i}$.

Задача 20. Изменятся ли компоненты тензора δ^i_j при переходе к другому базису?

Задача 21. Пусть x^i и y^j координаты векторов, соответственно, $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$. Являются ли наборы чисел $t^{ij} = x^i + y^j$ компонентами некоторого тензора?

Задача 22. Пусть t^k_{ij} – компоненты тензора $T^1_2(V)$ и $dim\ V = 2$. Написать закон преобразования компоненты t^1_{12}.

Задача 23. Доказать, что тензор t_{ij} – разложим тогда и только тогда, когда $rang\ ||t_{ij}|| = 1$.

Задача 24. Какие из следующих тензоров, заданных своими координатами, разложимы: $a)$ $t_{ij} = ij$; $b)$ $t_{ij} = \delta_{1i}j$; $c)$ $t_{ij} = i + j$?

Задача 25. Пусть t^i_{jk} – компоненты тензора в B_V. Найти $t^{i'}_{j'k'}$, если: $a)$ $C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ – матрица перехода от B_V к B'_V и $t^i_{j1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $t^i_{j2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$;

$b)$ $C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ – матрица перехода от B_V к B'_V и $t^i_{j1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $t^i_{j2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1` \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответы и решения.

Задача 2. Указание. Найти размерность ядра линейной функции.

Задача 3. Единственным ковектором является функция F^3. Обозначим через f^1, f^2, f^3 ковекторы базиса, двойственного к B_V. Пусть $F^3 = a_1 f^1 + a_2 f^2 + a_3 f^3$. Для того, чтобы найти коэффициенты разложения a_i подставим в равенство $F^3 = \sum_1^3 a_i f^i$ в качестве аргумента вектор $\overrightarrow{e_j}$, $j = 1, 2, 3$. Имеем: $F^3(\overrightarrow{e_j}) = \sum_1^3 a_i f^i(\overrightarrow{e_j})$. Теперь, учитывая определение двойственного базиса, получим $F^3(\overrightarrow{e_j}) = \sum_1^3 a_i \delta^i_j = a_j$. Таким образом, $a_1 = F^3(\overrightarrow{e_1}) = 1$, $a_2 = F^3(\overrightarrow{e_2}) = 4$, $a_3 = F^3(\overrightarrow{e_3}) = -1$.

Задача 4. 1-ый способ решения. Пусть $B_{V^*} = \{f^1, f^2\}$ и $B'_{V^*} = \{f^{1'}, f^{2'}\}$ – базисы двойственные, соответственно, к B_V и B'_V. Вычислим коэффициенты d_{ij} в разложении ковекторов

$$f^{1'} = d_{11} f^1 + d_{21} f^2, \tag{21}$$

$$f^{2'} = d_{12} f^1 + d_{22} f^2. \tag{22}$$

Для этого подставим вектор $\overrightarrow{e_{1'}}$ в качестве аргумента в обе части равенства (21). Тогда, учитывая определение двойственного базиса, приходим к равенству: $1 = d_{11}+d_{21}2$. Аналогично, подставляя в (21) вектор $\overrightarrow{e_{2'}}$, будем иметь: $0 = d_{11}(-1)+d_{21}$. Решая полученную систему относительно коэффициентов d_{11}, d_{21}, находим $d_{11} = 1/3$, $d_{21} = 1/3$. Аналогично из равенства (22) находим коэффициенты d_{12}, d_{22}.

2-ой способ решения. Применяя теорему 2, находим матрицу перехода D для двойственных базисов по формуле $D = (C^{-1})^t$, где $||C||$ – матрица перехода от B_V к B'_V.

Задача 5. Указание. Найти координаты ковектора $f^1 - f^2$ в базисе двойственном к базису B'_V.

Задача 7. 3). Базис $\{g_t(x) = \prod_{k=1,\, k\neq t}^{n+1}(x-k)/\prod_{k=1,\, k\neq t}^{n+1}(t-k)\}$ – двойственный к базису $\{a^t\}$, базис $\{g_i(x) = \frac{x^i}{i!}\}$ – двойственный к базису $\{g^i\}$.

Задача 9. Указание. Найти матрицу A, соответствующую функции $f : X = ||x^i_j|| \to x^i_j$.

Задача 10. Указание. Рассмотреть ядра этих функций.

Задача 11. Решение. По условию имеем равенства: $F(\overrightarrow{e_i}) = a^j_i\overrightarrow{e_j}$, где $i, j = \overline{1,n}$. Пусть $B_{V^*} = \{f^t\}$ – двойственный к B_V базис и $F^*(f^t) = b^t_s f^s$. Тогда по определению F^* имеем равенства $F^*(f^t)(\overrightarrow{e_i}) = f^t(F(\overrightarrow{e_i})) = f^t(a^j_i\overrightarrow{e_j}) = a^j_i f^t(\overrightarrow{e_j}) = a^j_i\delta^t_j = a^t_i$. В то же время $F^*(f^t)(\overrightarrow{e_i}) = b^t_s f^s(\overrightarrow{e_i}) = b^t_s\delta^s_i = b^t_i$. Важно отметить, что B не является матрицей оператора F^* в базисе B_{V^*}, т.к. образы базисных векторов $F^*(f^i)$ являются строками матрицы B, а не столбцами. Поэтому матрицей оператора F^* является матрица A^t.

Задача 14. Указание. Воспользоваться линейностью тензорного произведения или найти значения тензора на наборах базисных ковекторов.

Задача 17. Указание. Найти $t(\overrightarrow{e_{i_1}}, \overrightarrow{e_{i_2}}, f^{j_1}, f^{j_1})$. Ответ: $t = f^1\otimes f^2\otimes\overrightarrow{e^1}\otimes\overrightarrow{e^2} + f^2\otimes f^1\otimes\overrightarrow{e^2}\otimes\overrightarrow{e^1} - f^1\otimes f^2\otimes\overrightarrow{e^2}\otimes\overrightarrow{e^1} - f^2\otimes f^1\otimes\overrightarrow{e^1}\otimes\overrightarrow{e^2}$.

Задача 20. Нет.

Задача 21. Указание. Например, рассмотреть случай, когда $dim\ V = 2$ и $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Задача 23. Пусть $rang||t_{ij}|| = 1$. Тогда $\begin{vmatrix} t_{im} & t_{ip} \\ t_{jm} & t_{jp} \end{vmatrix} = 0\ \forall i, j, m, n = \overline{1,n}$. Пусть $t_{11} \neq 0$. Следовательно, $t_{jp} = \frac{t_{j1}t_{1p}}{t_{11}}$ при всех $i, p = \overline{1,n}$. Рассмотрим два ковектора $a = t_{j1}f^j$ и $b = \frac{t_{1p}}{t_{11}}f^p$. Тогда $t = a\otimes b$.

Литература

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. М.: Физ-мат. литература, 2001. 368 с.

[2] Сборник задач по алгебре. Под ред. А.И. Кострикина. М.: Факториал, 1995. 454 с.

[3] Малахальцев М.А., Фомин В.Е., Шапуков Б.Н., Шурыгин В.В. Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1993. 159 с.