Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
“Модели, методы и программные средства”

Основная образовательная программа
010100.68 “Математика”, магистерские программы “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, “Уравнения в частных производных”, “Комплексный анализ”, “Геометрия и топология”, “Алгебра”, квалификация (степень) магистр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
“Алгоритмы теории некорректных задач и их приложение в физической диагностике”

Основная образовательная программа
010100 “Математика”, профили “Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление”, “Алгебра, теория чисел, математическая логика”, “Геометрия и топология”, квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
“Некорректные задачи и методы их решения”

Основная образовательная программа
010200 “Математика и компьютерные науки”, профили “Математический анализ и приложения”, “Математическое и компьютерное моделирование”, “Алгебра и дискретный анализ”, квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
“Некорректные задачи и методы их решения”

Кутерин Ф.А., Сумин М.И.

ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ОПТИМИЗАЦИИ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ (С ПРОГРАММНЫМ КОМПЛЕКСОМ И ОПИСАНИЕМ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ)

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород 2012

ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ОПТИМИЗАЦИИ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ (С ПРОГРАММНЫМ КОМПЛЕКСОМ И ОПИСАНИЕМ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ). Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Электронное учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. - 90 с.

Учебно-методическое пособие посвящено изложению приемов и методов решения задач выпуклого программирования и канонических некорректных задач, к которым относятся классические задачи решения плохо обусловленных линейных алгебраических систем и линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, на основе метода двойственной регуляризации, предложенного и развитого в последнее десятилетие в работах одного из авторов данного пособия. Оно опирается на многолетний опыт авторов в преподавании теории и методов решения некорректных задач на механико-математическом факультете ННГУ и написано в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения (ФГОС-3).

Все изложение пособия ориентировано на непосредственное использование в рамках активной и интерактивной форм обучения студентов старших курсов в терминал-классе. Его основная цель – достижение полного и глубокого понимания теоретического материала посредством иллюстрации изучаемого в лекционном курсе метода двойственной регуляризации и одновременное сближение реального научного и учебного процессов. Это достигается, в частности, в процессе выполнения под руководством преподавателя в терминал-классе лабораторных работ, позволяющем обучающимся в интерактивном режиме следить на экране монитора (или на большом экране) за всеми основными этапами решения некорректной задачи и, кроме того, управлять ими, выбирая параметры методов, конечно-разностные сетки и т.п. Одновременно у них имеется возможность убедиться в том, что формальное решение некорректной задачи без использования регуляризирующих “рычагов” приводит к неудовлетворительному результату – полному “развалу” приближенного решения. Последовательное освоение обучающимися теоретического материала и параллельное выполнение лабораторных работ призваны в совокупности содействовать максимальному развитию целого ряда профессиональных компетенций, связанных с совершенствованием навыков математического и алгоритмического моделирования для целей решения реальных практических задач, возникающих в различных естественно-научных приложениях.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению 010100.68 “Математика”, изучающих курс “Алгоритмы теории некорректных задач и их приложения в физической диагностике”, а также по направлениям 010100 “Математика“ и 010200 “Математика и компьютерные науки”, изучающих курс “Некорректные задачи и методы их решения”.

Содержание

Введение

Цель учебно-методического пособия. Настоящее учебное-методическое пособие призвано частично восполнить большой недостаток доступной и качественной учебно-методической литературы по учебным курсам, связанным с изложением теории и методов решения так называемых некорректных задач. В этом отношении его можно рассматривать как учебно-методическое пособие, продолжающее линию учебного пособия [1] и учебно-методического пособия [2]. Учебное пособие [1] было посвящено достаточно подробному изложению четырех методов решения некорректных задач, три из которых являются классическими (метод Тихонова, метод невязки и метод квазирешений), а четвертый, так называемый метод двойственной регуляризации, предложенный в 2000-м году автором цитируемого пособия, является относительно новым. В свою очередь, в учебно-методическом пособии [2] эффективность указанных выше классических методов решения некорректных задач была весьма подробно проиллюстрирована на примере решения классической некорректной задачи, каковой является задача решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. При этом центральное внимание в [2] было уделено обсуждению соответствующих программ, написанных в среде Borland C++Builder 6.0, и лабораторных работ, призванных визуально проиллюстрировать в интерактивном режиме базовые моменты теории некорректных задач. В отличие от [2], настоящее учебно-методическое пособие полностью посвящено иллюстрации эффективности при решении широкого круга некорректных задач метода двойственной регуляризации. В нем, во-первых, обсуждается как указанный метод двойственной регуляризации позволяет трансформировать такие классические результаты выпуклой оптимизации как принцип Лагранжа, теорема Куна–Таккера, в утверждения, устойчивые по отношению к ошибкам исходных данных и пригодные для эффективного численного решения, в том числе, и некорректных задач. Центральную роль при этом играет формулируемая в двух полезных формах так называемая устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера. Наконец, во-вторых, в данном учебно-методическом пособии самое существенное внимание уделяется иллюстрации возможностей численного решения на основе устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера классических некорректных задач. К ним относятся задача решения линейной алгебраической системы, задача решения линейного интегрального уравнения Фредгольма I-го рода, так называемая обратная задача финального наблюдения для уравнения теплопроводности. Указанная иллюстрация заключается в достаточно подробном обсуждении написанных в среде Matlab и в совместимых с ней системах (Octave, Scilab) программ для ЭВМ, реализующих указанную теорему, а также в описании соответствующих лабораторных работ, нацеленных на визуальную иллюстрацию в интерактивном режиме особенностей итерационных процессов решения некорректных задач на основе устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера.

Все изложение пособия, в полном соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения (ФГОС-3), ориентировано на непосредственное использование в рамках активной и интерактивной форм обучения студентов старших курсов в терминал-классе. Его основная цель – достижение полного и глубокого понимания теоретического материала посредством иллюстрации изучаемого в лекционном курсе метода двойственной регуляризации и одновременное сближение реального научного и учебного процессов. Это достигается, в частности, в процессе выполнения под руководством преподавателя в терминал-классе лабораторных работ, позволяющем их исполнителям в интерактивном режиме следить на экране монитора (или на большом экране) за всеми основными этапами решения некорректной задачи и, кроме того, управлять ими, выбирая параметры методов, конечно-разностные сетки и т.п. Одновременно у них имеется возможность убедиться в том, что формальное решение некорректной задачи без использования регуляризирующих "рычагов" приводит к неудовлетворительному результату – полному “развалу” приближенного решения. Последовательное освоение обучающимися теоретического материала и параллельное выполнение лабораторных работ призваны в совокупности содействовать максимальному развитию целого ряда профессиональных компетенций, связанных с совершенствованием навыков математического и алгоритмического моделирования для целей решения реальных практических задач, возникающих в различных естественно-научных приложениях.

Базовые понятия теории некорректных задач и выпуклого программирования, их обсуждение. При решении самых разнообразных прикладных задач, а также при исследованиях в области математической теории естественным образом возникают так называемые некорректно поставленные задачи. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения в их исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений.

Традиционно в самых разнообразных источниках по теории и методам решения некорректных задач с целью определения понятия некорректной задачи используется операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \tag{0.1}$$

где Z, U – метрические пространства соответственно с метриками $\rho_Z(z_1, z_2)$, $\rho_U(u_1, u_2)$, $A: Z \to U$ – непрерывный оператор. Это связано с тем обстоятельством, что к операторному уравнению (0.1) приводится огромное число задач, возникающих в самых разнообразных приложениях.

Отдавая дань сложившейся традиции, приведем определение некорректной задачи, связанное с уравнением (0.1) и в данном учебно-методическом пособии. Для этого приведем прежде всего принадлежащее Ж. Адамару [3] определение корректно поставленной задачи (0.1).

Определение 0.1. *Задача* (*0.1*) *называется корректной по Адамару или корректно поставленной, если*

а) каждому элементу $u \in U$ *отвечает решение* $z \in Z$ *уравнения*

(0.1);

б) такое решение единственно для любого $u \in U$;

в) это решение непрерывно (в метрике Z) зависит от правой части $u \in U$, т.е. для любой пары элементов $z \in Z$, $u \in U$ такой, что $Az = u$, из предельного соотношения $\rho_U(u_\varepsilon, u) \to 0,\ \varepsilon \to 0$ вытекает предельное соотношение $\rho_Z(z_\varepsilon, z) \to 0, \varepsilon \to 0$, в котором элементы z_ε, u_ε связаны равенством $Az_\varepsilon = u_\varepsilon$.

Очевидно, что первые два условия обеспечивают существование обратного оператора $A^{-1} : U \to Z$. Другими словами, условия а), б) характеризуют математическую определенность задачи. Наличие же условия в) в определении корректности обеспечивает непрерывность обратного оператора $A^{-1} : U \to Z$, что позволяет решать задачу (0.1) при неточно известной правой части u, т.е. в ситуации, имеющей место в реальных практических (физических) задачах, с помощью тех или иных приближенных методов .

Определение некорректно поставленной задачи естественно вытекает из определения 0.1.

Определение 0.2. *Задача (0.1), не удовлетворяющая хотя бы одному из требований а) – в) определения 0.1, называется некорректной или некорректно поставленной.*

В основе теории и методов решения некорректных задач лежит понятие регуляризирующего алгоритма. Впервые понятие регуляризирующего алгоритма с целью приближенного решения задачи (0.1) было предложено А.Н.Тихоновым в 1963 году [4], [5] (см. также [6]). Напомним это понятие для случая, когда оператор A в уравнении (0.1) задан точно, а правая часть $u_0 \in U$ известна лишь приближенно с точностью $\delta > 0$, т.е. в нашем распоряжении имеется элемент $u_\delta \in U$, причем

$$\rho_U(u_0, u_\delta) \leqslant \delta.$$

В более общей ситуации и неточно заданного оператора соответствующее определение можно найти в [6], а также в [1], [2].

Считаем также для простоты, что точной правой части u_0 соответствует единственное в Z решение z_0 точного уравнения

$$Az = u_0. \tag{0.2}$$

Определение 0.3. *Регуляризирующим алгоритмом (относительно элемента z_0) будем называть оператор R, который каждой паре (u, δ), такой, что $\rho_U(u_0, u) \leqslant \delta$ ставит в соответствие некоторый элемент $R(u, \delta) \equiv z_\delta \in Z$ (свой для каждого элемента u из шара $\{u \in U : \rho_U(u_0, u) \leqslant \delta\}$), причем $\rho_Z(z_0, z_\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Легко видеть, что если в нашем распоряжении имеется регуляризирующий оператор (алгоритм), то решение (приближенное) некорректной задачи (0.2) сводится к вычислению его значения на элементе $u_\delta \in U$, так как по определению 0.3

$$\rho_Z(R(u_\delta, \delta), z_0) \to 0,\ \ \delta \to 0.$$

Более общее понятие регуляризирующего алгоритма, учитывающее и возможность возмущения оператора A, можно найти в [6], а также в [1], [2].

Ценность фундаментального понятия регуляризирующего алгоритма состоит в том, что каждый конкретный регуляризирующий алгоритм, вообще говоря, дает метод приближенного решения некорректно поставленной задачи с неточными исходными данными, устойчивый по отношению к возмущению (ошибкам) в этих данных. Любой такой метод, как правило основывается на использовании дополнительной априорной информации об искомом решении, которая практически всегда имеется в той или иной форме в каждой конкретной задаче. Необходимые подробности, связанные с возможными способами учета такой априорной информации при решении некорректной задачи можно найти в [1]. Регуляризирующие алгоритмы, обладая устойчивостью по отношению к ошибкам входных данных, допускают программную реализацию на ЭВМ и тем самым открывают возможности создания конкретных вычислительных комплексов для решения некорректных задач.

В данном учебно-методическом пособии мы будем рассматривать, прежде всего, не операторные уравнения вида (0.1), а задачи выпуклого программирования вида

$$(P) \qquad f(z) \to \min, \;\; Az = h, \;\; g_i(z) \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, m, \\ z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $f : Z \to R^1$ – сильно выпуклый непрерывный функционал, $A : Z \to H$ – линейный непрерывный оператор, $h \in H$ – заданный элемент, $g_i : Z \to R^1$, $i = 1, \ldots, m$, – выпуклые непрерывные функционалы, $g(z) \equiv (g_1(z), \ldots, g_m(z))$, $\mathcal{D}$ – выпуклое замкнутое множество, Z, H – гильбертовы пространства. Как будет показано ниже, сводятся, в частности, и задачи решения операторных уравнений вида (0.1) в случае линейного ограниченного оператора A, заданного на паре гильбертовых пространств Z, U.

Подобно тому, как было введено определение 0.3 регуляризирующего алгоритма применительно к задаче решения операторного уравнения (0.1), можно ввести аналогичное понятие и для решения основной для данного учебно-методического пособия задачи выпуклого программирования (P). Однако, мы не будем здесь этого делать из-за определенных неудобств введения соответствующих метрических пространств, которым должны принадлежать исходные данные f, A, h, g_i, $i = 1, \ldots, m$, задачи (P).

Тем не менее, мы, прежде всего, определим понятия корректной и некорректной задачи минимизации (P) с точными исходными данными. Если ввести обозначение $\mathcal{D}^0 \equiv \{z \in \mathcal{D} : \; Az = h, \; g_i(z) \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, m\}$, то задачу (P) можно записать в компактной форме

$$(P_C) \qquad f(z) \to \min, \;\; z \in \mathcal{D}^0.$$

В [6], [7], [8] (см. также [1]) можно найти следующее определение корректной задачи минимизации в случае точного задания функции f и множества $\mathcal{D}^0$.

Определение 0.4. *Задача (P_C) называется корректно поставленной (в метрике пространства Z), если: 1)* $f^* \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}^*} f(z) > -\infty$

и множество $\mathcal{D}^* \equiv \{u \in \mathcal{D} : f(z) = f^*\}$ *непусто; 2) любая минимизирующая последовательность в этой задаче сходится в метрике пространства* Z *ко множеству* $\mathcal{D}^*$.

В соответствии с принятым в [7], [8] определением, если нарушено хотя бы одно из двух условий, содержащихся в определении 0.4, то задачу (P_C) называют некорректной в широком смысле слова. Там же, в [7], [8], можно найти и определение понятия некорректности задачи (P_C) в следующем более узком смысле при условии выполнимости предположения 1) определения 0.4.

Определение 0.5. *Задачу* (P_C) *в предположении* $f^* > -\infty$, $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$ *будем называть некорректно поставленной (в метрике пространства* Z*), если существует минимизирующая последовательность в этой задаче, не сходящаяся в метрике пространства* Z *ко множеству* $\mathcal{D}^*$.

Так как в задаче (P_C) сильно выпуклый функционал f непрерывен, а выпуклые функционалы g_i, $i = 1, \ldots, m$ заданы и непрерывны на Z, то, в случае непустоты $\mathcal{D}^0$ задача (P_C), а вместе с ней и задача (P) разрешимы единственным образом и являются корректными в смысле определения 0.4.

Однако принципиальной особенностью возникающих в различных приложениях задач математического программирования вида (P) и, как следствие, задачи (P_C), является то, что функционалы f, g_i и оператор A и, как следствие, множество $\mathcal{D}^0$ могут задаваться неточно (с ошибками), в связи с чем принятое в [7], [8] определение некорректности оптимизационной задачи, основанное на понятии классической минимизирующей последовательности (т.е. минимизирующей последовательности, элементы которой удовлетворяют ограничениям задачи в точном смысле) становится в этом случае не вполне удобным. Определим другое понятие минимизирующей последовательности в задаче (P), которое хорошо согласуется с возможным неточным заданием исходных данных, носит название минимизирующего приближенного решения и было введено в теории оптимизации Дж. Варгой [9].

Определение 0.6. *Минимизирующим приближенным решением в задаче* (P) *называется такая последовательность* z^i, $i = 1, 2, \ldots,$ *для которой справедливы соотношения* $f(z^i) \leqslant \beta + \delta^i$, $z^i \in \mathcal{D}^{\varepsilon^i}$ *для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел* δ^i, ε^i, $i = 1, 2, \ldots.$ *Здесь* β *– обобщенная нижняя грань:*

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \beta_\varepsilon, \quad \beta_\varepsilon \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^\varepsilon} f(z), \quad \beta_\varepsilon \equiv +\infty, \ \textit{если}\ \mathcal{D}^\varepsilon = \emptyset,$$

$$\mathcal{D}^\varepsilon \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|Az - h\| \leqslant \varepsilon, \ g_i(z) \leqslant \varepsilon, \ i = 1, \ldots, m\}, \ \ \varepsilon \geqslant 0.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta \leqslant \beta_0$, где β_0 – классическое значение задачи, т.е. $\beta_0 = f(z^0)$, если z^0 – решение задачи (P). Но в случае поставленной выше задачи (P) имеет место равенство $\beta = \beta_0$, доказательство которого проводится по той же точно схеме, что и доказательство аналогичного равенства леммы 2.4.1 в [1]. Поэтому для любого минимизирующего приближенного решения задачи z^i, $i = 1, 2, \ldots$ задачи (P) в случае ее разрешимости (это заведомо так, если $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$) справедливо предельное соотношение

$$f(z^i) \to f(z^0), \ \ i \to \infty.$$

Более того, в этом случае при условии дифференцируемости по Фреше функционала f оказывается справедливым и более сильное предельное соотношение (см. лемму 1.1 в разделе 1) $z^i \to z^0$, $i \to \infty$, которое говорит о том, что задача (P) в случае ее разрешимости (когда $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$) является также корректной в смысле определения 0.4 и в том случае, когда в этом определении вместо классического понятия минимизирующей последовательности используется принципиально более адекватное с точки зрения приложений понятие минимизирующего приближенного решения. В то же время, задача (P), являясь корректной в смысле определения 0.4 в случае обоих понятий минимизирующей последовательности при точно заданных исходных данных, оказывается неустойчивой по отношению к возмущению этих данных как по аргументу, так и по функции. Рассмотрим простейший иллюстративный пример.

Пример 0.1. *Пусть имеется задача минимизации сильно выпуклой квадратичной функции двух переменных на множестве, задаваемом аффинным ограничением типа равенства, эквивалентная задаче поиска нормального решения линейной алгебраической системы двух уравнений с двумя неизвестными*

$$|x|^2 \to \min,\ Ax = y,\ x \in R^2, \quad A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (0.3)$$

точное нормальное решение которой равно $x^* = (0,5; 0,5)$. *Двойственная к* (*0.3*) *задача имеет вид*

$$V(\lambda) \equiv L(x(\lambda), \lambda) = -\frac{1}{4}\langle AA^*\lambda, \lambda\rangle - \langle y, \lambda\rangle \to \max,\ \ \lambda \in R^2,$$

где $L(x, \lambda) \equiv |x|^2 + \langle \lambda, Ax - y\rangle$, $x(\lambda) \equiv \operatorname{argmin}\{L(x, \lambda),\, x \in R^2\} = -\frac{1}{2}A^*\lambda$. *Ее решением является вектор* $(-1, \alpha)\,\forall\,\alpha \in R^1$. *Легко проверить, что любой такой вектор является и вектором Куна–Таккера* (*см. определение вектора Куна–Таккера 1.1 в разделе 1*) *задачи* (*0.3*). *Рассмотрим возмущенную задачу* (*0.3*) *при* $\delta > 0$

$$|x|^2 \to \min,\ A^\delta x = y^\delta,\ x \in R^2, \quad A^\delta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix},\ y^\delta \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}. \quad (0.4)$$

Соответствующая двойственная задача

$$V^\delta(\lambda) \equiv L^\delta(x^\delta(\lambda), \lambda) \to \max,\ \ \lambda \in R^2$$

имеет решение $\lambda^\delta = (\frac{2-2\delta}{\delta}, \frac{2\delta-4}{\delta^3})$, *являющееся для задачи (0.4) вектором Куна–Таккера, и при этом вектор* $x^\delta(\lambda^\delta) \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta(x, \lambda^\delta),$ $x \in R^2\} = (1 - \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta})$ *есть, в соответствии с классической теоремой Куна–Таккера (см. классическую теорему Куна–Таккера в недифференциальной форме 1.1 в разделе 1), решение возмущенной задачи* (*0.4*) *и одновременно “приближенное” решение исходной задачи* (*0.3*), *которое при* $\delta \to 0$ *не сходится к ее единственному* *точному решению. При этом значение задачи $|x^\delta(\lambda^\delta)|^2$, как функция от δ, терпит разрыв 2-го рода в точке $\delta = 0$.*

Пример 0.1 отчетливо показывает, что минимизирующие приближенные решения ведут себя принципиально неустойчиво по отношению к возмущению исходных данных задач. В нем значения целевого функционала на элементах минимизирующего приближенного решения в невозмущенной задаче (0.1), состоящего из одного и того же элемента $(0,5; 0,5)$ (такая последовательность является одновременно и классической минимизирующей последовательностью), равны ее значению $\frac{1}{2}$. В то же время, значения целевого функционала на элементах минимизирующего приближенного решения в возмущенной задаче (0.4), состоящего из одного и того же элемента $(1 - \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta})$, равны ее значению $1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{\delta^2}$ и стремятся к $+\infty$ при $\delta \to 0$. Таким образом, мы имеем в точке $\delta = 0$ разрыв 2-го рода функции значений рассматриваемой задачи в зависимости от величины $\delta > 0$, характеризующей ошибку задания исходных данных. Итак, минимизирующее приближенное решение в исходной задаче нельзя формально составлять даже из элементов, доставляющих точный минимум в возмущенных задачах.

Выше мы установили, что задача (P) с точными исходными данными при условии ее разрешимости является корректной, если в качестве понятия минимизирующей последовательности используется понятие минимизирующего приближенного решения. По этой причине представляется естественным в случае неточного задания исходных данных стремиться к отысканию такого алгоритма, который обеспечивал бы устойчивое по отношению к возмущениям этих данных построение минимизирующего приближенного решения в исходной невозмущенной задаче. Таким алгоритмом для задачи (P) является упомянутый выше алгоритм (метод) двойственной регуляризации [1], [11]. Говоря совсем коротко, он заключается в непосредственном решении на основе метода стабилизации А.Н. Тихонова [6] (см. также [1]) задачи двойственной по отношению к исходной задаче (P) и одновременном параллельном решении самой исходной задачи (P). Краткому изложению двух вариантов этого метода для решения задачи (P), формулировкам теорем их сходимости посвящен раздел 2 настоящего учебно-методического пособия.

Важнейшей особенностью алгоритма двойственной регуляризации помимо возможности устойчивого построения минимизирующего приближенного решения в задаче (P) является и возможность регуляризации на его основе классических условий оптимальности в этой задаче, каковыми являются различные версии теоремы Куна–Таккера (см. классическую теорему Куна–Таккера в недифференциальной форме 1.1 в разделе 1). Как известно из общего курса оптимизации (см., например, [8], [12]), теорема Куна–Таккера, как в недифференциальной, так и в дифференциальной формах является основным критерием оптимальности в задачах выпуклого программирования. Однако, приведенный выше пример 0.1, число которых можно неограниченно увеличивать, говорит не только о неустойчивости задач выпуклого программирования, о неустойчивости их приближенных минимизирующих решений при возмущении исходных данных, но и об аналогичной "неустойчивости" самой теоремы Куна–Таккера. Действительно, для пояснения этого обстоятельства вернемся к анализу примера 0.1. Как исходная невозмущенная задача (0.3), так и возмущенная (0.4) в этом примере обладают, как замечено, векторами Куна–Таккера. По этой причине их единственные решения $(0,5; 0,5)$ и $(1 - \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta})$ соответственно являются в полном соответствии с классической теоремой Куна–Таккера, как в недифференциальной, так и в дифференциальной формах, единственными точками, удовлетворяющими всем необходимым соотношениям этих вариантов классической теоремы. Таким образом, формальное применение классической теоремы Куна–Таккера при возмущении исходных данных задачи (P) может привести и приводит к сколь угодно большим возмущениям элементов, удовлетворяющих классическим условиям оптимальности при сколь угодно малых возмущениях этих данных. Оказывается, однако, что этот недостаток классической теоремы может быть эффективно преодолен на основе алгоритма двойственной регуляризации. В этом случае мы и говорим о регуляризации классической теоремы Куна–Таккера и, соответственно, о ее регуляризованных вариантах, как в недифференциальной, так и в дифференциальной формах. Эта регуляризация с формальной точки зрения заключается в переходе от привычных формулировок классической теоремы в терминах оптимальных элементов к формулировкам в терминах минимизирующих приближенных решений задачи (P) или, другими словами, в переводе классических формулировок на секвенциальный язык минимизирующих последовательностей. Получаемый от такого перевода на секвенциальный язык на основе алгоритма двойственной регуляризации выигрыш заключается, во-первых, в устойчивом относительно возмущения исходных данных задачи (P) построении для нее минимизирующих приближенных решений на основе регуляризованных формулировок, во-вторых, в независимости такого построения от того, существует или нет в задаче (P) вектор Куна–Таккера и, наконец, в-третьих, в возможности, в силу первых двух отмеченных выше обстоятельств, непосредственного решения на основе регуляризованных вариантов теоремы Куна–Таккера широкого класса, в том числе и некорректных, задач оптимизации, оптимального управления и так называемых обратных задач. Напомним, что формулировки классической теоремы Куна–Таккера в обязательном порядке предполагают существование вектора Куна–Таккера в задаче. Формулировкам устойчивых секвенциальных теорем Куна–Таккера, соответствующим комментариям посвящен раздел 3 настоящего учебно-методического пособия.

1 Постановка задачи выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом качества и классическая теорема Куна–Таккера

Рассмотрим задачу минимизации

$$(P^0)\ \ f^0(z) \to \min,\ A^0 z = h^0,\ g_i^0(z) \leqslant 0,\ i = 1,\dots,m,\ z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $f^0 : Z \to R^1$ – сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклости $\varkappa > 0$, $A^0 : Z \to H$ – линейный непрерывный оператор, $h^0 \in H$ – заданный элемент, $g_i^0 : Z \to R^1$, $i = 1, \ldots, m$, – выпуклые функционалы, $g^0(z) \equiv (g_1^0(z), \ldots, g_m^0(z))$, $\mathcal{D}$ – выпуклое замкнутое множество, Z, H – гильбертовы пространства. Будем также считать, что

$$|f^0(z_1)-f^0(z_2)| \leqslant L_M\|z_1-z_2\|, \ |g_i^0(z_1)-g_i^0(z_2)| \leqslant L_M\|z_1-z_2\| \quad (1.1)$$

$$\forall\, z_1,\ z_2 \in \mathcal{D} \cap S_M,\ \ i = 1, \ldots, m,$$

где $L_M > 0$ – постоянная, $S_M \equiv \{z \in Z : \ \|z\| \leqslant M\}$. Исходные данные задачи снабжены верхним индексом 0. Это означает, что задача (P^0) соответствует ситуации их точного задания.

Заметим, что условия (1.1) автоматически следуют из сформулированных выше условий выпуклости исходных данных задачи (P^0), если функционалы f^0, $g_i^0 : Z \to R^1$, $i = 1, \ldots, m$, являются ограниченными на каждом ограниченном подмножестве из пространства Z (см. лемму 1.5.18 в [1]). Более того, оказывается, что последнее утверждение является верным и без указанного условия ограниченности, если пространство Z конечномерно (см. следствие 2.2 в [10]).

Пусть решение задачи (P^0) существует. Так как функционал f^0 сильно выпуклый, а $\mathcal{D}^0 \equiv \{z \in \mathcal{D} : \ A^0 z = h^0,\ g_i^0(z) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ – выпуклое и замкнутое множество (см. теорему 1.5.14 в [1]), то указаное решение существует и единственно, если $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$. Обозначим это решение через z^0.

Множество $\mathcal{D}^\varepsilon$, значение β задачи (P^0), соответствующие ситуации точного задания исходных данных, обозначим через $\mathcal{D}^{0\varepsilon}$, β^0, соответственно.

Так как задача (P^0) является выпуклой, а функционал f^0 к тому же сильно выпуклый и непрерывный на $\mathcal{D}$, то для любого минимизирующего приближенного решения этой задачи z^i, $i = 1, 2, \ldots$ справедливо, как уже отмечалось во введении, предельное соотно-

шение
$$f^0(z^i) \to f^0(z^0), \ \ i \to \infty. \tag{1.2}$$
Более того, имеет место

Лемма 1.1. *Если функционал f^0 является и дифференцируемым по Фреше на Z, то для любого минимизирующего приближенного решения этой задачи z^i, $i = 1, 2, \ldots$ справедливо предельное соотношение*
$$z^i \to z^0, \ \ i \to \infty. \tag{1.3}$$

Замечание 1.1. *Оказывается, предельное соотношение (1.3) при выписанных выше условиях на исходные данные задачи (P^0) справедливо и без предположения дифференцируемости по Фреше. Однако, доказательство этого факта требует применения методов негладкого выпуклого анализа, выходящих за рамки традиционных учебных общих и специальных курсов.*

Доказательство. Так как последовательность z^i, $i = 1, 2, \ldots$ является минимизирующим приближенным решением, то для нее справедливо предельное соотношение (1.2), из которого, в частности, в силу известной оценки для сильно выпуклых функционалов (см. лемму 1.5.22 в [1]) для функционала f^0, рассматриваемого на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{D}^0$, имеет место оценка $\varkappa\|z^i - z^0\|^2 \leqslant f^0(z^i) - f^0(z^0)$, $i = 1, 2, \ldots$. Из этой оценки следует, что последовательность z^i, $i = 1, 2, \ldots$ ограничена и, следовательно, в силу слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества в гильбертовом пространстве (см. теорему 1.5.3 в [1]) ее можно без ограничения общности считать слабо сходящейся к некоторому элементу $\bar{z} \in \mathcal{D}$. Одновременно, так как каждый непрерывный выпуклый функционал в гильбертовом пространстве слабо полунепрерывен снизу (см. лемму 1.5.8 в [1]), то в силу условий (1.1) и определения минимизирующего приближенного решения имеют место включение $\bar{z} \in \mathcal{D}^0$ и неравенство $f^0(\bar{z}) \leqslant \beta^0 = f^0(z^0)$, из которых следует в силу единственности решения задачи (P^0) равенство $\bar{z} = z^0$. Таким образом, последовательность z^i, $i = 1, 2, \ldots$ слабо сходится к элементу z^0. Тогда, пользуясь критерием сильной выпуклости для дифференцируемых по Фреше выпуклых функционалов (см. лемму 1.5.20 в [1]), можем записать оценку

$$f^0(z^i) \geqslant f^0(z^0) + \langle f^{0\prime}(z^0), z^i - z^0 \rangle + \frac{\varkappa}{2} \|z^i - z^0\|^2.$$

Доказываемое предельное соотношение (1.3) является непосредственным следствием этой оценки с учетом предельного соотношения (1.2) и доказанной выше слабой сходимости последовательности z^i, $i = 1, 2, \ldots$ к z^0.

Пусть F – множество всевозможных наборов исходных данных $\mathsf{f} \equiv \{f,\, A,\, h,\, g_i,\, i = 1, \ldots, m\}$, каждый из которых состоит из сильно выпуклого на $\mathcal{D}$ с независящей от набора постоянной сильной выпуклости $\kappa > 0$ функционала f, линейного непрерывного оператора A, элемента h и выпуклых на $\mathcal{D}$ функционалов g_i, $i = 1, \ldots, m$, причем справедливы оценки

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant L_M \|z_1 - z_2\|,\ |g_i(z_1) - g_i(z_2)| \leqslant L_M \|z_1 - z_2\|$$

$$\forall\, z_1,\, z_2 \in \mathcal{D} \cap S_M,\ i = 1, \ldots, m,$$

с независящей от набора постоянной L_M.

Определим далее наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных: $\mathsf{f}^0 \equiv \{f^0,\, A^0,\, h^0,\, g^0_i,\, i = 1, \ldots, m\}$ и $\mathsf{f}^\delta \equiv \{f^\delta,\, A^\delta,\, h^\delta,\, g^\delta_i,\, i = 1, \ldots, m\}$ соответственно, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число. Будем считать, что

$$|f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant C\delta(1 + \|z\|),\ \ \|A^\delta - A^0\| \leqslant C\delta, \tag{1.4}$$

$$\|h^\delta - h^0\| \leqslant C\delta,\ \ |g^\delta(z) - g^0(z)| \leqslant C\delta(1 + \|z\|)\ \ \forall z \in \mathcal{D},$$

где $C > 0$ не зависит от δ, $g^\delta \equiv (g^\delta_1, \ldots, g^\delta_m)$.

С учетом приближенного задания исходных данных мы имеем вместо задачи (P^0) семейство задач, зависящих от величины δ, характеризующей ошибку их задания

$$(P^\delta) \qquad f^\delta(z) \to \inf,\quad A^\delta z = h^\delta,\ \ g^\delta_i(z) \leqslant 0,\quad z \in \mathcal{D},$$

каждая из которых при $\delta > 0$ может быть как разрешимой, так и неразрешимой.

Введем функционал Лагранжа

$$L^\delta(z,\lambda,\mu) \equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta\rangle + \langle \mu, g^\delta(z)\rangle,$$

$$z \in \mathcal{D},\ \lambda \in H,\ \mu \in R^m,$$

и вогнутый двойственный функционал

$$V^\delta(\lambda,\mu) \equiv \inf_{z\in\mathcal{D}} L^\delta(z,\lambda,\mu),\ \ \lambda \in H,\ \mu \in R^m.$$

Ввиду сильной выпуклости при любых $(\lambda,\mu) \in H \times R^m_+$, где $R^m_+ \equiv \{x = (x_1,\ldots,x_m) \in R^m : x_i \geqslant 0,\, i = 1,\ldots,m\}$, функционала Лагранжа $L^\delta(z,\lambda,\mu),\ z \in \mathcal{D}$, значение $V^\delta(\lambda,\mu)$ достигается на единственном элементе

$$z^\delta[\lambda,\mu] \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta(z,\lambda,\mu),\, z \in \mathcal{D}\}.$$

В случае ограниченного множества $\mathcal{D}$ двойственный функционал V^δ, очевидно, определен и конечен для любого элемента $(\lambda,\mu) \in H \times R^m$.

Справедлива (см. лемму 3.5.1 в [1])

Лемма 1.2. *Функционал $V^\delta(\lambda,\mu)$, $(\lambda,\mu) \in H \times R^m_+$ является конечным, вогнутым и непрерывным.*

В заключение раздела напомним формулировку классической теоремы Куна–Таккера для задачи выпуклого программирования (P^0), являющейся центральным результатом всей теории выпуклого программирования. С этой целью, прежде всего, приведем определение классического базового для теории оптимизации понятия вектора Куна–Таккера этой задачи (см., например, [1, Теорема 1.5.16], а также [8], [12], [13]).

Определение 1.1. *Вектором Куна–Таккера задачи (P^0) называется такая пара $(\lambda^*,\mu^*) \in H \times R^m_+$, что*

$$\beta_0 \leqslant L^0(z,\lambda^*,\mu^*)\ \ \forall\, z \in \mathcal{D},$$

где β_0 — классическое значение задачи (P^0) (см. определение 0.6).

Можно показать (см., например, [8], [12], [13]), что любой такой вектор Куна–Таккера (λ^*, μ^*) в паре с z^0 составляют седловую точку функции Лагранжа $L^0(\cdot, \cdot, \cdot)$. Различные версии условий существования векторов Куна–Таккера в задачах выпуклого программирования см. в [8], [12], [13]. Одновременно, различные содержательные примеры задач вида (P^0), в которых не существует векторов Куна–Таккера, см. в [1], [11].

Теорема 1.1. [*Классическая теорема Куна–Таккера*] *Пусть* $f^0 : Z \to R^1$ *– выпуклый функционал и, кроме того, в задаче* (P^0) *существует вектор Куна–Таккера* $(\lambda^*, \mu^*) \in H \times R^m_+$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

Если $z^0 \in \mathcal{D}^0$ *– оптимальный элемент в задаче* (P^0), *т.е.* $f(z^0) = \beta_0$, *то для множителей Лагранжа* $y \in H$, $\xi \in R^m_+$, $(y, \xi) = (\lambda^*, \mu^*)$, *выполняются соотношения*

$$L^0(z^0, y, \xi) \leqslant L^0(z, y, \xi) \; \forall \, z \in \mathcal{D}, \quad \xi_i g_i(z^0) = 0, \;\; i = 1, \ldots, m. \quad (1.5)$$

И, наоборот, если $z^0 \in \mathcal{D}^0$ *такой элемент, что при некоторых* $y \in H$, $\xi \in R^m_+$ *выполняются соотношения (1.5), то этот элемент оптимален в задаче* (P^0), *а пара* (y, ξ) *является вектором Куна–Таккера для нее.*

Множество всех векторов $(y, \xi) \in H \times R^m_+$, *удовлетворяющих соотношениям* (1.5), *совпадает с множеством всех решений двойственной к* (P^0) *задачи*

$$V^0(\lambda, \mu) \to \max, \;\; (\lambda, \mu) \in H \times R^m_+,$$

а также с множеством всех ее векторов Куна–Таккера.

2 Двойственная регуляризация в задачах выпуклого программирования с сильно выпуклыми функционалами качества

Основной целью данного раздела является краткое описание различных вариантов алгоритма двойственной регуляризации [11], [14], подробное изложение которого можно найти в учебном пособии [1, Разделы 2.4, 3.5]. Напомним, что этот алгоритм представляет собой общий метод устойчивого построения минимизирующего приближенного решения для задачи (P^0).

2.1 Алгоритм двойственной регуляризации для решения задачи выпуклого программирования

Данный раздел содержит формулировку теоремы сходимости алгоритма двойственной регуляризации, доказательство которой можно найти в [1, Раздел 3.5.4].

Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}, \mu^{\delta,\alpha})$ единственную в $H \times R^m_+$ точку, дающую на этом множестве максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta(\lambda,\mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha|\mu|^2, \ \ (\lambda,\mu) \in H \times R^m_+.$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \ \ \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{2.1}$$

Предположим также, что в условиях данного раздела 2.1 вместо оценки $\|A^\delta - A^0\| \leqslant C\delta$ в (1.4) выполняется более слабая оценка

$$\|A^\delta z - A^0 z\| \leqslant C\delta(1 + \|z\|) \ \ \forall z \in Z. \tag{2.2}$$

Алгоритм двойственной регуляризации для решения задачи выпуклого программирования (P^0) с сильно выпуклым функционалом цели заключается в аппроксимации при $\delta \to 0$ точного решения z^0, регуляризованными элементами $z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ при условии согласования (2.1). Подчеркнем при этом, что с формальной точки зрения точки $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)})$ конструируются в соответствии с методом стабилизации А.Н. Тихонова (см., например, [1, Разделы 2.3, 3.2]), примененным к задаче максимизации $V^0(\lambda,\mu) \to \sup$, $(\lambda,\mu) \in H \times R^m_+$, являющейся двойственной по отношению к исходной задаче (P^0) (определение двойственной задачи и некоторые необходимые связанные с ним сведения можно найти в [1, Раздел 1.5.8]).

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условие согласования (2.1) и оценка (2.2). Тогда, вне зависимости от того, разрешима или нет* *двойственная к (P^0) задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), справедливы предельные соотношения*

$$f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\to f^0(z^0),\ \ \delta\to 0, \tag{2.3}$$

$$A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^0\to 0,$$

$$g_i^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\leqslant\phi(\delta),\ i=1,\dots,m,\ \phi(\delta)\geqslant 0,\ \phi(\delta)\to 0,\ \delta\to 0,$$

$$\langle(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}),(A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^\delta,g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))\rangle\geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\langle(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}),(A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^\delta,g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))\rangle\to 0.$$

Одновременно, справедливо и предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to+0}V^0(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)})=\sup_{(\lambda,\mu)\in H\times R_+^m}V^0(\lambda,\mu)=f^0(z^0).$$

Если же двойственная к (P^0) задача разрешима, то

$$(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)})\to(\lambda^0,\mu^0),\ \ \ \delta\to 0,$$

где $(\lambda^0,\mu^0)\in H\times R_+^m$ есть ее решение с минимальной нормой.

Одновременно, если сильно выпуклый функционал f^0 является дифференцируемым по Фреше на Z, то в силу трех предельных соотношений (2.3) выполняется и предельное соотношение (см. лемму 1.1)

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-z^0\|\to 0,\ \delta\to 0.$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), алгоритм двойственной регуляризации представляет собою алгоритм устойчивого построения минимизирующего приближенного решения.

Замечание 2.1. *Предельное соотношение (2.4) можно трактовать как обобщение на случай минимизирующих последовательностей классического для теории оптимизации условия дополняющей нежесткости.*

Ниже в следующеем разделе нам будет нужен “след” сформулированной теоремы 2.1, получающийся из нее формальным занулением величины δ, характеризующей ошибку задания исходных данных. Его непосредственное доказательство можно найти в [11]. Для формулировки указанного “следа” обозначим через $(\lambda^\alpha, \mu^\alpha)$ единственную в $H \times R^m_+$ точку, дающую на этом множестве максимум функционалу

$$R^{0,\alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^0(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha|\mu|^2, \ \ (\lambda, \mu) \in H \times R^m_+,$$

т.е. удовлетворяющую формальному равенству $(\lambda^\alpha, \mu^\alpha) = (\lambda^{0,\alpha}, \mu^{0,\alpha})$.

Теорема 2.2. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), выполняются соотношения*

$$f^0(z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) \to f^0(z^0), \ \ \alpha \to 0, \tag{2.5}$$

$$A^0 z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha] - h^0 \to 0,$$

$$g^0_i(z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) \leqslant \phi(\alpha), \ i = 1, \ldots, m, \ \phi(\alpha) \geqslant 0, \ \ \phi(\alpha) \to 0, \ \ \alpha \to 0,$$

$$\langle(\lambda^\alpha, \mu^\alpha), (A^0 z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha] - h^0, g^0(z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]))\rangle \geqslant 0, \tag{2.6}$$

$$\langle(\lambda^\alpha, \mu^\alpha), (A^0 z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha] - h^0, g^0(z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]))\rangle \to 0, \ \alpha \to 0,$$

говорящие о том, что для любой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел α^i, $i = 1, 2, \ldots$, последовательность $z^0[\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}]$ является минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0). Одновременно, семейство зависящих от $\alpha > 0$ двойственных переменных $(\lambda^\alpha, \mu^\alpha)$ является при $\alpha \to 0$ максимизирующим в двойственной задаче, т.е.

$$\lim_{\alpha \to +0} V^0(\lambda^\alpha, \mu^\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu) \in H \times R^m_+} V^0(\lambda, \mu) = f^0(z^0). \tag{2.7}$$

Если же двойственная к (P^0) задача разрешима, то

$$(\lambda^\alpha, \mu^\alpha) \to (\lambda^0, \mu^0), \ \ \ \delta \to 0, \tag{2.8}$$

где $(\lambda^0, \mu^0) \in H \times R^m_+$ есть ее решение с минимальной нормой.

Кроме того, как и в теореме 2.1, предельные соотношения (2.5) *обеспечивают, в случае дифференцируемости по Фреше* f^0*, и сходимость по аргументу*

$$\|z^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha] - z^0\| \to 0,\ \alpha \to 0.$$

Итак, в зависимости от того, имеет или нет решение двойственная к (P^0) задача, сконструированный выше двойственный алгоритм ведет себя, вообще говоря, двояко. В случае существования решения двойственной задачи генерируемое в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации семейство двойственных переменных $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)})$, $\delta \to 0$ ограничено в $H \times R^m_+$. Если же такого решения нет, то нормы элементов этого семейства неограниченно возрастают при $\delta \to 0$.

2.2 Алгоритм итеративной двойственной регуляризации для решения задачи выпуклого программирования в случае ограниченного множества $\mathcal{D}$

Итак, описанный в предыдущем разделе алгоритм двойственной регуляризации, состоящий в непосредственном решении в пространстве $H \times R^m$ на основе метода стабилизации А.Н. Тихонова двойственной к (P^0) задачи, дает "параллельную" сходимость приближений к z^0 в пространстве Z при условии, что параметр регуляризации α согласованно с величиной δ, характеризующей ошибку исходных данных, стремится к нулю. Такой процесс сходимости в пространстве решений Z, "параллельный" процессу решения двойственной задачи в случае ситуации теоремы 2.2, когда исходные данные известны точно, мы будем называть, в соответствии с традициями в теории регуляризации (см., например, [8]), базовым процессом. В данном разделе, мы организуем итерационный процесс или, другими словами, процесс итеративной регуляризации в пространстве двойственных переменных $H \times R^m$. Этот процесс в пространстве $H \times R^m$ является по сути дела регуляризованным итерационным процессом обычного градиентного метода подъема (см., например, [8]). На каждом его шаге вычисляется, с помощью решения в пространстве Z "параллельной" задачи минимизации сильно выпуклого функционала Лагранжа для задачи (P^0), градиент для целевого функционала двойственной задачи и одновременно очередное приближение в пространстве Z к точному решению исходной задачи z^0. При этом оказывается совершенно не нужно решать регуляризованную двойственную задачу при каждом фиксированном значении параметра регуляризации α с помощью бесконечного итерационного процесса, как это было бы нужно делать в соответствии с организацией базового процесса. Мы показываем, что процесс итеративной регуляризации стабилизируется (как это принято говорить в теории итеративной регуляризации) к базовому процессу, сходящемуся к решению z^0. Таким образом, эти два процесса, базовый и процесс итеративной регуляризации, "идут" параллельно, "притягиваясь" друг к другу, и из сходимости базового процесса мы выводим поэтому сходимость процесса итеративной регуляризации. В заключение изложения теории итеративной двойственной регуляризации мы даем регуляризирующее правило останова бесконечного итерационного процесса в том случае, когда ошибка исходных данных является конечной и не стремится к нулю. Последняя ситуация как раз и реализуется при практическом решении конкретных прикладных задач.

Предполагаем в данном разделе, что множество $\mathcal{D}$ ограничено и используем обозначение $(\lambda^{0,\alpha^k}, \mu^{0,\alpha^k}) \equiv (\lambda^{\alpha^k}, \mu^{\alpha^k}) \equiv (\lambda^k, \mu^k)$, где $(\lambda^{\alpha^k}, \mu^{\alpha^k})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ – последовательность вырабатываемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 2.2 в случае $(\delta = 0,\ \alpha(\delta) \equiv \alpha)$ $\alpha = \alpha^k$. Здесь α^k, $k = 1, 2, \ldots$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Предположим, что последовательность $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ конструируется в соответствии с итерационным правилом

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = Pr_{H \times R^m_+}((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \partial V^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - \tag{2.9}$$

$$2\beta^k \alpha^k (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $(\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0) \in H \times R^m_+$,

$$\partial V^\delta(\lambda, \mu) = (A^\delta z^\delta[\lambda, \mu] - h^\delta, g^\delta(z^\delta[\lambda, \mu])), \tag{2.10}$$

а последовательности δ^k, α^k, β^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям согласования

$$\delta^k \geqslant 0,\ \alpha^k > 0,\ \beta^k > 0,\ \ \lim_{k\to\infty}(\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0,\ \ \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \leqslant C_0, \tag{2.11}$$

$$\frac{|\alpha^{k+1} - \alpha^k|}{(\alpha^k)^3\beta^k} \to 0,\ \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \to 0,\ \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6} \to 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k\beta^k = +\infty.$$

Последовательности α^k и β^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие соотношениям (2.11) существуют. Например, в этом качестве можно использовать последовательности $\alpha^k = k^{-1/6}$, $\beta^k = k^{-1/(5/3)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание 2.2. *Доказательство формулы (2.10), представляющей собою выражение для градиента Фреше функционала $V^\delta(\lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in H \times R^m_+$, можно найти в [1, Лемма 3.5.2].*

При сделанных предположениях, как показано в [1] (см. также [11]), справедливы предельные соотношения

$$\|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k)\| \to 0, \quad \|z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] - z^0[\lambda^k, \mu^k]\| \to 0,\ k \to \infty \tag{2.12}$$

и, как следствие, предельные соотношения

$$f^0(z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) \to f^0(z^0),\ \ A^0 z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] - A^0 z^0[\lambda^k, \mu^k] \to 0, \tag{2.13}$$

$$g^0_i(z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) - g^0_i(z^0[\lambda^k, \mu^k]) \to 0,\ \ i = 1, \ldots, m,\ k \to \infty,$$

$$\|z^0[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] - z^0[\lambda^k, \mu^k]\| \to 0,\ \ \|z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] - z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]\| \to 0.$$

Кроме того, если сильно выпуклый функционал f^0 является дифференцируемым по Фреше на Z, то мы имеем также и предельное соотношение

$$\|z^0[\lambda^k, \mu^k] - z^0\| \to 0,\ k \to \infty.$$

Полученные предельные соотношения позволяют трансформировать теорему 2.1 в следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть множество $\mathcal{D}$ ограничено и выполняются условия согласования (2.11). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (P^0) *задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), выполняются предельные соотношения*

$$f^0(z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k]) \to f^0(z^0),\ \ \delta^k \to 0,\ \ k \to \infty,$$

$$A^0 z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k] - h^0 \to 0,$$

$$g_i^0(z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k]) \leqslant \phi(\delta^k) \to 0,\ \ \ \phi(\delta^k) \geqslant 0,\ \ \phi(\delta^k) \to 0,$$

$$\langle(\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k),(A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k] - h^{\delta^k}, g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k]))\rangle \to 0,\ \ \delta^k \to 0,\ \ k \to \infty.$$

Одновременно с указанными предельными соотношениями выполняются и предельные соотношения

$$f^0(z^0[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k]) \to f^0(z^0),$$

$$\langle(\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k),(A^0 z^0[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k] - h^0, g^0(z^0[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k]))\rangle \to 0,\ \ \delta^k \to 0,\ \ \ k \to \infty$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$\lim_{\delta^k \to +0} V^0(\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k) = \sup_{(\lambda,\mu)\in H\times R^m_+} V^0(\lambda,\mu) = f^0(z^0).$$

Если двойственная к (P^0) *задача разрешима, то*

$$(\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k) \to (\lambda^0,\mu^0), \quad k \to \infty,$$

где $(\lambda^0,\mu^0) \in H \times R^m_+$ *есть ее решение с минимальной нормой.*

Если сильно выпуклый функционал f^0 *является и дифференцируемым по Фреше на* Z*, то справедливо и предельное соотношение (см. лемму 1.1)*

$$\|z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k,\bar{\mu}^k] - z^0\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

2.3 Алгоритм итеративной двойственной регуляризации для решения задачи выпуклого программирования без условия ограниченности множества $\mathcal{D}$

Оказывается, во многих важных частных случаях условие ограниченности множества $\mathcal{D}$ в теореме 2.3 можно отбросить. В частности, если задача (P^0) имеет вид

$$(P^0_{AE}) \qquad \|z\|^2 \to \min, \quad A^0 z = h^0, \;\; z \in Z,$$

то, как показано в [1, Теорема 2.4.2] вместо теоремы 2.3 можно применять следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть для итерационного процесса*

$$\bar\lambda^{k+1} = \bar\lambda^k + \beta^k \partial V^{\delta^k}(\bar\lambda^k) - 2\beta^k\alpha^k\bar\lambda^k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.14}$$

где $\bar\lambda^0 \in H$,

$$\partial V^\delta(\lambda) = A^\delta z^\delta[\lambda] - h^\delta,$$

выполняются условия согласования

$$\delta^k \geqslant 0, \;\; \alpha^k > 0, \;\; \beta^k > 0, \;\; \lim_{k\to\infty}(\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0, \;\; \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \leqslant C_0, \tag{2.15}$$

$$\frac{|\alpha^{k+1} - \alpha^k|}{(\alpha^k)^3\beta^k} \to 0, \;\; \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \to 0, \;\; \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^3} \to 0, \;\; \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k\beta^k = +\infty.$$

Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0_{AE}) *задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), выполняются предельные соотношения*

$$\|z^{\delta^k}[\bar\lambda^k]\|^2 \to \|z^0\|^2, \;\; \delta^k \to 0, \;\; k \to \infty,$$

$$A^0 z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] - h^0 \to 0, \;\; \langle \bar\lambda^k, (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] - h^{\delta^k})\rangle \to 0, \;\; \delta^k \to 0, \;\; k \to \infty,$$

из которых с учетом дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$ *вытекает и сходимость*

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \to z^0, \;\; \delta^k \to 0, \;\; k \to \infty.$$

Одновременно с указанными предельными соотношениями выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\delta^k \to +0} V^0(\bar{\lambda}^k) = \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda) = \|z^0\|^2.$$

Если двойственная к (P^0_{AE}) *задача разрешима, то*

$$\bar{\lambda}^k \to \lambda^0, \quad k \to \infty,$$

где $\lambda^0 \in H$ *есть ее решение с минимальной нормой.*

2.4 Устойчивое правило останова процесса итеративной двойственной регуляризации

Существенной особенностью теоремы 2.3 является то, что она предполагает что величина δ^k, характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \to \infty$. Это условие является во многих практических ситуациях весьма ограничительным, так как в реальных прикладных задачах указанная величина, характеризующая ошибку исходных данных, является конечной фиксированной величиной, характеризующей работу реального измерительного прибора и по этой причине не равной нулю. В связи со сказанным, в данном разделе дается так называемое регуляризирующее правило останова итерационного процесса теоремы 2.3, в котором в полной мере учитывается ее отмеченный выше недостаток.

Пусть последовательности чисел $\delta^k,\ \alpha^k,\ \beta^k,\ k = 0, 1, 2, \dots,$ удовлетворяют условиям (2.11). Зафиксируем следующее правило останова процесса (2.9)

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \partial V^\delta(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots;\ (\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0) \in H \times R^m_+,$$

при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$: при каждом $\delta > 0, \delta \leqslant \delta^1$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенство

$$\delta^k \geqslant \delta,\ \ k = 1, 2, \dots, k(\delta). \tag{2.16}$$

Справедлива

Теорема 2.5. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (P^0) *задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), справедливы предельные соотношения*

$$f^0(z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) \to f^0(z^0), \;\; A^0 z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}] - h^0 \to 0,$$

$$g_i^0(z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) \leqslant \phi(\delta), \;\; i = 1, \ldots, m, \; \phi(\delta) \to 0, \; \delta \to 0,$$

а также и предельное соотношение

$$\|z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}] - z^0\| \to 0, \;\; \delta \to 0,$$

где $z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]$ *– результат* $k(\delta)$ *итераций итерационного процесса (2.9). Другими словами, указанное правило останова порождает устойчивый по отношению к ошибкам исходных данных алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче* (P^0).

Соответствующим правилом останова может быть оснащена и теорема 2.4. Пусть последовательности $\delta^k, \; \alpha^k, \; \beta^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$ удовлетворяют условиям (2.15). Зафиксируем следующее правило останова процесса (2.14)

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta^k \partial V^\delta(\bar{\lambda}^k) - 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots; \; \bar{\lambda}^0 \in H,$$

при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$: при каждом $\delta > 0, \delta \leqslant \delta^1$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенство (2.16). Справедива [1, Теорема 2.4.3]

Теорема 2.6. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (P^0_{AE}) *задача (существует вектор Куна–Таккера в ней или нет), справедливы предельные соотношения*

$$\|z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]\|^2 \to \|z^0\|^2, \;\; A^0 z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}] - h^0 \to 0, \; \delta \to 0,$$

а также и предельное соотношение

$$\|z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}] - z^0\| \to 0, \;\; \delta \to 0,$$

где $z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]$ *– результат* $k(\delta)$ *итераций итерационного процесса (2.14). Другими словами, указанное правило останова порождает устойчивый по отношению к ошибкам исходных данных алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче* (P^0_{AE}).

3 Устойчивые секвенциальные теоремы Куна–Таккера в задачах выпуклого программирования с сильно выпуклыми функционалами качества

Обсуждаемые в данном разделе так называемые устойчивые теоремы Куна–Таккера были впервые предложены в [14], [15]. Как уже отмечалось во введении, эти теоремы обобщают на случай минимизирующих последовательностей одноименные классические теоремы, являющиеся основными теоремами выпуклого программирования и формулируемые в терминах оптимальных элементов и соответствующих им решений двойственных по отношению к исходным задач. Их фундаментальное отличие от классических теорем заключается в том что они устойчивы по отношению к возмущениям исходных данных, и, как следствие, могут непосредственно использоваться для практического решения разнообразных некорректных задач, сводящихся к основной для данного учебно-методического пособия задаче (P^0). Обсуждение возможностей практического решения задач оптимизации, ряда канонических неустойчивых задач на основе устойчивых секвенциальных теорем Куна–Таккера данного раздела можно найти в следующих разделах 4, 5.

3.1 Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера

Доказательство фомулируемой ниже устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера может быть найдено в [14]. Отметим, что в [14] эта теорема носит название регуляризованной теоремы Куна–Таккера.

Предполагаем, что в условиях данного раздела 3.1, как и в разделе 2.1, вместо оценки $\|A^\delta - A^0\| \leqslant C\delta$ в (1.4) выполняется более слабая оценка (2.2).

Теорема 3.1. *Для того, чтобы в задаче* (P^0) *существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к* z^0*, см. лемму 1.1), необходимо чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times R^m_+$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, такая, что* $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$*,* $k \to \infty$*, и выполняются соотношения*

$$z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k},\ \epsilon^k \to 0, \tag{3.1}$$
$$\langle (\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] - h^{\delta^k}, g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k])) \rangle \to 0, \ \ k \to \infty,$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, является ограниченной. Более того, эта последовательность является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P^0)*, а в случае дифференцируемости по Фреше функционала* f^0 *на* Z *имеет место и сходимость* $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \to z^0$*,* $k \to \infty$*. Одновременно являются справедливыми и предельные соотношения*

$$f^0(z^0[\lambda^k, \mu^k]) \to f^0(z^0), \tag{3.2}$$
$$\langle (\lambda^k, \mu^k), (A^0 z^0[\lambda^k, \mu^k] - h^0, g^0(z^0[\lambda^k, \mu^k])) \rangle \to 0, \ \ k \to \infty,$$

следствием которых является и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \to \sup_{(\lambda', \mu') \in H \times R^m_+} V^0(\lambda', \mu'). \tag{3.3}$$

В качестве последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times R^m_+$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, может быть взята последовательность* $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k)})$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, элементов* $(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)})$ *из теоремы 2.1, взятых при* $\delta = \delta^k$*.*

Обратно, для существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) *достаточно существования последовательности двойственных переменных* $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times R^m_+$*,* $k = 1, 2, \ldots$ *такой, что* $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$*,* $k \to \infty$*, выполняются предельные соотношения (3.1), а последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, является ограниченной. Более того, эта последовательность является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P^0)*, а в случае дифференцируемости по Фреше* *функционала* f^0 *на* Z *имеет место и сходимость* $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \to z^0,\ k \to \infty$. *Если дополнительно выполняются и предельные соотношения* (3.2), *тогда выполняется и предельное соотношение* (3.3). *Одновременно, каждая слабая предельная точка последовательности* $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times R^m_+,\ k = 1, 2, \dots$, *является точкой максимума в двойственной задаче* $V^0(\lambda, \mu) \to \max,\ \ (\lambda, \mu) \in H \times R^m_+$.

3.2 Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме с регуляризирующим правилом останова

Приводимая ниже в данном разделе устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме нацелена прежде всего на непосредственное практическое решение задач выпуклого программирования с сильно выпуклыми целевыми функционалами, в том числе, и неустойчивых по отношению к ошибкам исходных данных, и разнообразных сводящихся к ним задач.

Теорема 3.2. *Пусть множество* $\mathcal{D}$ *является ограниченным. Для того, чтобы в задаче* (P^0) *существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к* z^0, *см. лемму 1.1), необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных* $(\bar\lambda^k, \bar\mu^k) \in H \times R^m_+,\ k = 1, 2, \dots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.9) *с условиями согласования* (2.11) *выполнялись предельные соотношения*

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k},\ \epsilon^k \to 0, \tag{3.4}$$

$$\langle(\bar\lambda^k, \bar\mu^k), (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k] - h^{\delta^k}, g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k]))\rangle \to 0,\ \ k \to \infty.$$

В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k]$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0), *а в случае дифференцируемости по Фреше функционала* f^0 *на* Z *имеет место и сходимость* $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k] \to z^0,\ k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\bar\lambda^k, \bar\mu^k) \to \sup_{(\lambda', \mu') \in H \times R^m_+} V^0(\lambda', \mu'). \tag{3.5}$$

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно чтобы для последовательности двойственных переменных* $(\bar\lambda^k, \bar\mu^k) \in H \times R^m_+$, $k = 1, 2, \dots,$ *порождаемой итерационным процессом* (2.9) *с условиями согласования* (2.11), *выполнялись предельные соотношения* (3.4). *В этом случае последовательность* $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k],\ k = 1, 2, \dots,$ *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P^0), *а в случае дифференцируемости по Фреше функционала* f^0 *на* Z *имеет место и сходимость* $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k] \to z^0,\ \ k \to \infty.$ *Одновременно является справедливым и предельное соотношение* (3.5).

Доказательство. Для доказательства необходимости заметим, прежде всего, что задача (P^0) разрешима в силу существования минимизирующего приближенного решения и условий на ее исходные данные. Поэтому предельные соотношения (3.4), (3.5) доказываемой теоремы являются следствиями теоремы 2.3. Далее, для доказательства достаточности мы, в первую очередь заметим, что задача (P^0) разрешима благодаря включениям $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}$, $k = 0, 1, \dots,$ ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k],\ k = 0, 1, \dots,$ и условий на ее исходные данные. Тогда в силу теоремы 2.2 существует последовательность $(\lambda^{0,\alpha^k}, \mu^{0,\alpha^k}) \equiv (\lambda^{\alpha^k}, \mu^{\alpha^k}) \equiv (\lambda^k, \mu^k)$, $k = 0, 1, \dots,$ порождаемая алгоритмом двойственной регуляризации в случае точного задания исходных данных, и, как следствие, последовательность $(\bar\lambda^k, \bar\mu^k),\ k = 0, 1, 2, \dots,$ порождаемая итерационным процессом (2.9) с условиями согласования (2.11), удовлетворяет предельным соотношениям (2.12), (2.13) и (3.5). По этой причине последовательность $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k, \bar\mu^k],\ k = 1, 2, \dots$ является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0).

Естественно, что аналогичная устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера может быть сформулирована и в случае задачи специального вида (P^0_{AE}) без условия ограниченности множества $\mathcal{D}$. Справедлива следующая теорема, доказательство которой совершенно аналогично доказательству теоремы 3.2

Теорема 3.3. *Для того, чтобы в задаче* (P^0_{AE}) *существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к* z^0*), необходимо, чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar{\lambda}^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15) *выполнялись предельные соотношения*

$$z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \ \epsilon^k \to 0, \quad \langle \bar{\lambda}^k, (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - h^{\delta^k} \rangle \to 0, \ \ k \to \infty. \quad (3.6)$$

В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0_{AE}) *и в силу дифференцируемости по Фреше* $\|\cdot\|^2$ *имеет место и сходимость* $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \to z^0, \ \ k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\bar{\lambda}^k) \to \sup_{\lambda' \in H} V^0(\lambda'). \quad (3.7)$$

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0_{AE}) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar{\lambda}^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15), *выполнялись предельные соотношения* (3.6). *В этом случае последовательность* $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P^0_{AE}) *и одновременно имеет место сходимость* $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \to z^0, \ \ k \to \infty$, *а также предельное соотношение* (3.7).

Существенной особенностью теорем 3.2, 3.3 является то, что они, как и теоремы 2.3, 2.4 предполагают что величина δ^k, характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как это условие стремления к нулю при $k \to \infty$ величины δ^k является в практических задачах очень ограничительным, то, как и теоремы 2.3, 2.4, теоремы 3.2, 3.3 снабжаются соответствующими регуляризирующими правилами останова итерационных процессов. Эти правила останова практически дословно совпадают с правилми останова, сформулированными в разделе 2 после теорем 2.3, 2.4 (см. теоремы 2.5, 2.6), и могут быть использованы при практическом решении неустойчивых задач на основе устойчивых секвенциальных теорем Куна–Таккера в итерационной форме 3.2, 3.3, так как являются устойчивыми алгоритмами построения минимизирующих приближенных решений в задачах (P^0) и (P^0_{AE}) соответственно.

4 Применение двойственной регуляризации и устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера в задачах выпуклой оптимизации

Прежде всего, следует сказать, что сформулированные в предыдущем разделе устойчивые секвенциальные теоремы Куна–Таккера могут быть эффективно применены для непосредственного численного решения различных задач выпуклого программирования вида (P^0) с сильно выпуклыми целевыми функционалами и сводящихся к ним задач. В частности, к задачам вида (P^0) сводятся многочисленные задачи оптимального управления, а также некорректные задачи, к которым, в первую очередь, относятся задачи решения так называемых абстрактных уравнений первого рода вида (0.1), задаваемых на паре гильбертовых пространств. Тому, как устойчивые секвенциальные теоремы Куна–Таккера могут быть применимы для решения некорректных задач, будет посвящен следующий раздел 5. В данном же разделе мы покажем как эти теоремы могут быть использованы непосредственно в выпуклой оптимизации.

4.1 Применение двойственной регуляризации для получения классических условий оптимальности

Покажем как двойственная регуляризация, а, по сути дела, и устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера, приводит к обычным классическим условиям оптимальности в выпуклом программировании – классическим теореме Куна–Таккера и принципу Лагранжа. С точки зрения наибольшей простоты изложения нам будет удобно воспользоваться для этой цели теоремой 2.2 при дополнительном упрощающем предположении, что гильбертовы пространства Z, H являются конечномерными: $Z = R^n$, $H = R^l$. При этом оператор A^0 есть $(l \times n)$-матрица. В общей ситуации задачи (P^0) приводимые ниже рассуждения носят более сложный характер и здесь обсуждаться не будут.

Итак, пусть $z^0 \in \mathcal{D}$ – оптимальный (и единственный) элемент в задаче (P^0). Пусть $\alpha^i,\ i = 1, 2, \dots,$ – произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Предположим сначала, что последовательность $(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}),\ i = 1, 2, \dots,$ ограничена и считаем ее без ограничения общности сходящейся: $(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}) \to (\lambda^0, \mu^0),\ i \to \infty$. При этом, так как последовательность $z^0[\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}]$, $i = 1, 2, \dots,$ является минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0), удовлетворяющим первому предельному соотношению (2.5), то она в силу известной оценки для сильно выпуклых функционалов (см., например, [1, Лемма 1.5.22]), является ограниченной, а значит, без ограничения общности будем считать ее сходящейся: $z^0[\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}] \to \bar{z} \in \mathcal{D}$, $i \to \infty$, т.е. получаем равенство $f^0(\bar{z}) = f^0(z^0)$. К тому же, одновременный предельный переход во втором и третьем предельных соотношениях (2.5), взятых при $\alpha = \alpha^i$, дает соотношения: $A^0\bar{z} = h^0,\ g_i^0(\bar{z}) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, m$, говорящие вместе с полученным выше равенством в силу единственности решения z^0 задачи (P^0), что $\bar{z} = z^0$. Одновременный предельный переход в обобщенном соотношении дополняющей нежесткости (2.6), взятом при $\alpha = \alpha^i$, приводит к классическому одноименному условию $\langle \mu^0, g^0(z^0) \rangle = 0$, которое может быть переписано и в виде $\mu_j^0 g_j^0(z^0) = 0$, $j = 1, \dots, m$. При этом, в силу предельного соотношения (2.7) мы также имеем очевидное равенство $V^0(\lambda^0, \mu^0) = \max\limits_{(\lambda,\mu)\in H \times R_+^m} V^0(\lambda, \mu) = f^0(z^0)$, которое с учетом полученных выше соотношений может быть переписано как

$$\min_{z\in\mathcal{D}} \max_{(\lambda,\mu)\in R^l \times R_+^m} L^0(z, \lambda, \mu) = f^0(z^0) =$$

$$L^0(z^0, \lambda^0, \mu^0) = \max_{(\lambda,\mu)\in R^l \times R_+^m} \min_{z\in\mathcal{D}} L^0(z, \lambda, \mu),$$

а также
$$f^0(z^0) \leqslant L^0(z, \lambda^0, \mu^0) \,\forall\, z \in \mathcal{D}.$$
Первое из последних двух соотношений означает, что пара точек $z^0 \in \mathcal{D}$ и $(\lambda^0, \mu^0) \in R^l \times R^m_+$ является седловой парой (определение седловой точки см. в [1, Определение 1.5.28])) для функции Лагранжа $L^0(z, \lambda, \mu)$ на $\mathcal{D} \times R^l \times R^m_+$, а второе то, что пара $(\lambda^0, \mu^0) \in R^l \times R^m_+$ является вектором Куна–Таккера (см. определение 1.1, а также [1, Теорема 1.5.16]) для задачи (P^0). Как известно, оба этих понятия являются классическими для выпуклого программирования и теснейшим образом между собою связаны (некоторые подробности можно найти в [1, Раздел 1.5.8])). А, именно, если вектор Куна–Таккера $(\lambda^0, \mu^0) \in R^l \times R^m_+$ существует в задаче (P^0), то в паре с z^0 он составляет седловую точку функции Лагранжа $L^0(z, \lambda, \mu)$ на $\mathcal{D} \times R^l \times R^m_+$. И, наоборот, для любой седловой точки $(z^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathcal{D} \times R^l \times R^m_+$ функции Лагранжа на $\mathcal{D} \times R^l \times R^m_+$ в задаче (P^0) вектор z^* есть ее решение, т.е. $z^* = z^0$, а пара векторов (λ^*, μ^*) есть решение двойственной к ней задачи.

В случае, если двойственная к (P^0) задача разрешима (в этом случае минимальное по норме ее решение существует в силу леммы 1.2), то в силу предельного соотношения (2.8) последовательность $(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})$, $i = 1, 2, \ldots$, ограничена и, значит, можем повторить все только что проведенные рассуждения.

Нетрудно сообразить, что проведенные выше рассуждения обратимы в том смысле, что если существует такая ограниченная последовательность двойственных переменных $(\lambda^i, \mu^i) \in R^k \times R^m_+$, $i = 1, 2, \ldots$ для которой выполняются соотношения
$$A^0 z^0[\lambda^i, \mu^i] - h^0 \to 0,$$
$$g^0_i(z^0[\lambda^i, \mu^i]) \leqslant \phi^i,\ i = 1, \ldots, m,\ \phi^i \geqslant 0,\ \ \phi^i \to 0,\ \ i \to \infty,$$
$$\langle (\lambda^i, \mu^i), (A^0 z^0[\lambda^i, \mu^i] - h^0, g^0(z^0[\lambda^i, \mu^i])) \rangle \geqslant 0,$$
$$\langle (\lambda^i, \mu^i), (A^0 z^0[\lambda^i, \mu^i] - h^0, g^0(z^0[\lambda^i, \mu^i])) \rangle \to 0,\ i \to \infty,$$

а последовательность $z^0[\lambda^i, \mu^i]$, $i = 1, 2, \ldots$, является ограниченной, то эта последовательность является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) сходящимся (в силу конечномерности R^n) к точке $z^0 \in \mathcal{D}^0$, удовлетворяющей соотношениям

$$L^0(z^0, \lambda^0, \mu^0) \leqslant L^0(z, \lambda^0, \mu^0)\, \forall\, z \in \mathcal{D},\;\; \mu^0_j g^0_j(z^0) = 0,\; j = 1, \ldots, m,$$

в которых (λ^0, μ^0) – произвольная предельная точка последовательности $(\lambda^i, \mu^i) \in R^k \times R^m_+$, $i = 1, 2, \ldots$. При этом, как следует из классического курса оптимизации (см., например, [8]), выполняется и равенство

$$V^0(\lambda^0, \mu^0) = \max_{(\lambda,\mu) \in R^l \times R^m_+} L^0(z, \lambda, \mu) = f^0(z^0),$$

из которого, в частности, следует, что (λ^0, μ^0) – вектор Куна–Таккера задачи (P^0).

Таким образом, мы получили все соотношения классической теоремы Куна–Таккера (см. классическую теорему Куна–Таккера в недифференциальной форме 1.1 в разделе 1), представляющей собою критерий оптимальности, на основе алгоритма двойственной регуляризации или, другими словами, по сути дела, на основе регуляризованной теоремы Куна–Таккера. Если исходные данные задачи (P^0) обладают нужными свойствами дифференцируемости, то недифференциальное соотношение минимума функции Лагранжа можно переписать в соответствующей дифференциальной форме, получив тем самым классическую теорему Куна–Таккера в дифференциальной форме.

Предположим теперь, что последовательность точек $(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})$, $i = 1, 2, \ldots$, неограничена. Тогда в силу компактности единичной сферы конечномерного пространства без ограничения общности считаем, что

$$\frac{(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})}{|(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})|} \to (\bar{\lambda}, \bar{\mu}),\; i \to \infty, \quad |(\bar{\lambda}, \bar{\mu})| = 1.$$

Так как и в этом случае последовательность $z^0[\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}]$, $i = 1, 2, \ldots$, является минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0), удовлетворяющим первому предельному соотношению (2.5), то она опять же в силу известной оценки для сильно выпуклых функционалов (см., например, [1, Лемма 1.5.22]), является ограниченной, а значит, без ограничения общности будем и в этом случае считать ее сходящейся: $z^0[\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}] \to \bar{z} \in \mathcal{D}$, $i \to \infty$, т.е. получаем равенство $f^0(\bar{z}) = f^0(z^0)$. Точно также, совершенно аналогично предыдущему случаю, получаем и равенства $A^0\bar{z} = h^0$, $g_i^0(\bar{z}) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, говорящие вместе с полученным выше равенством, в силу единственности решения z^0 задачи (P^0), что $\bar{z} = z^0$.

Переходя к пределу при $i \to \infty$ в неравенстве

$$\frac{1}{|(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})|} L^0(z^0[\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}], \lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}) \leqslant \frac{1}{|(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})|} L^0(z, \lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i}) \;\; \forall\, z \in \mathcal{D},$$

получаем предельное неравенство

$$L^0(z^0, 0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant L^0(z, 0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \;\; \forall\, z \in \mathcal{D},$$

в котором используется стандартное обозначение $L^0(z, \nu, \lambda, \mu) \equiv \nu f^0(z) + \langle \lambda, A^0 z - h^0 \rangle + \langle \mu, g^0(z) \rangle$, $\nu \geqslant 0$.

Поделив одновременно на $|(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})|$ и неравенство в обобщенном условии дополняющей нежесткости (2.6) и опять же переходя к пределу при $i \to \infty$ в полученном выражении, получаем и здесь в пределе сначала неравенство $\langle \bar{\mu}, g^0(z^0) \rangle \geqslant 0$, а затем в силу допустимости z^0 и классическое условие дополняющей нежесткости $\bar{\mu}_j g_j^0(z^0) = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Объединив полученные классические необходимые условия в случае ограниченной последовательности $(\lambda^{\alpha^i}, \mu^{\alpha^i})$, $i = 1, 2, \ldots$ с полученными аналогичными условиями в случае когда она не ограничена, мы получили все соотношения классического принципа Лагранжа в недифференциальной форме, который можно переписать в соответствующей дифференциальной форме, получив тем самым классический принцип Лагранжа в дифференциальной форме, если исходные данные обладают соответствующими нужными дифференциальными свойствами (подробности, связанные с различными версиями принципа Лагранжа для задач вида (P^0) можно найти в [8], [12], [13]).

4.2 Применение устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера для решения задач оптимального управления

Покажем в этом разделе как устойчивые секвенциальные теоремы Куна–Таккера раздела 3, сфомулированные применительно к задаче выпуклого программирования в гильбертовом пространстве, могут быть применимы непосредственно для решения выпуклых задач оптимального управления.

В качестве иллюстративного примера применения результатов раздела 3 в оптимальном управлении рассмотрим стандартную задачу оптимального управления с фиксированным временем и с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства

$$(P^\delta_{OC}) \qquad f^\delta(u) \to \min, \quad u \in \mathcal{D} \subset Z \equiv L_2(0,1),$$

$$\tilde{a}^\delta_i(u) = 0, \;\; i = 1,\dots,k, \;\; g^\delta_i(u) \leqslant 0, \;\; i = 1,\dots,m,$$

$$f^\delta(u) \equiv \int_0^1 (\langle A^\delta_0(t)x^\delta[u](t), x^\delta[u](t)\rangle + \langle B^\delta_0(t)u(t), u(t)\rangle)dt,$$

$$\tilde{a}^\delta_i(u) \equiv \int_0^1 \langle c^\delta_i(t), x^\delta[u](t)\rangle dt + \int_0^1 \langle d^\delta_i(t), u(t)\rangle dt,$$

$$g^\delta_i(u) \equiv \int_0^1 (\langle A^\delta_i(t)x^\delta[u](t), x^\delta[u](t)\rangle + \langle B^\delta_i(t)u(t), u(t)\rangle)dt.$$

Здесь и ниже: $\delta \in [0, \delta_0]$ – характеризующее ошибку исходных данных число, $\delta_0 > 0$ – фиксированное число, $f^\delta : L_2(0,1) \to R^1$ – сильно выпуклый функционал, $g^\delta_i : L_2(0,1) \to R^1$, $i = 1,\dots,m$ – выпуклые функционалы, A^δ_i, $i = 0,1,\dots,m$, $A^\delta : [0,1] \to R^{n\times n}$, B^δ_i, $i = 0,1,\dots,m$, $B^\delta : [0,1] \to R^{n\times l}$ – измеримые по Лебегу равномерно по $\delta \in [0,\delta_0]$ ограниченные матрицы, $c^\delta_i : [0,1] \to R^n$, $d^\delta_i : [0,1] \to R^l$, $i = 1,\dots,k$ – измеримые по Лебегу равномерно по $\delta \in [0,\delta_0]$ ограниченные векторы, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,1) : u(t) \in$

U при п.в. $t \in (0,1)\}$, $U \subset R^l$ – выпуклый компакт, $x^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = F^\delta(t)x + B^\delta(t)u(t), \;\; x(0) = x_0 \in R^n, \quad t \in [0,1] \qquad (4.1)$$

с некоторым фиксированным начальным состоянием x_0.

В этом случае, как известно, все решения $x^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$ при любом фиксированном $x_0 \in R^n$ равномерно по $u \in \mathcal{D}$ и $\delta \in [0,\delta_0]$ ограничены (см., например, [1, Теорема 1.5.10, Замечание 1.5.1])

$$|x^\delta[u](t)| \leqslant K \;\forall u \in \mathcal{D}, \delta \in [0,\delta_0], t \in [0,1]. \qquad (4.2)$$

Обозначим через $x_0^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$ решение задачи Коши (4.1) при $x_0 = 0$. Тогда, очевидно, $x^\delta[u] = x_0^\delta[u] + x^\delta[0]$. Введем также обозначения

$$a_i^\delta(u) \equiv \int_0^1 \langle c_i^\delta(t), x_0^\delta[u](t)\rangle dt + \int_0^1 \langle d_i^\delta(t), u(t)\rangle dt, \quad h_i^\delta \equiv \tilde{a}_i^\delta(0),$$

$$A^\delta u \equiv A^\delta(u) \equiv (a_1^\delta(u), \ldots, a_k^\delta(u)), \quad g^\delta(u) \equiv (g_1^\delta(u), \ldots, g_m^\delta(u)),$$
$$h^\delta \equiv (h_1^\delta, \ldots, h_k^\delta),$$

которые позволяют переписать исходную задачу (P_{OC}^δ) в эквивалентном виде

$$(P_{OC}^\delta) \qquad f^\delta(u) \to \min, \quad u \in \mathcal{D},$$

$$a_i^\delta(u) + h_i^\delta = 0, \;\; i = 1,\ldots,k, \;\; g_i^\delta(u) \leqslant 0, \;\; i = 1,\ldots,m,$$

но уже с линейными непрерывными функционалами $a_i^\delta(u)$, $u \in L_2(0,1)$ (доказательство этого факта основывается на теореме устойчивости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по возмущению управления, которую можно найти, например, в [1, Теорема 1.5.9]) и с $H = R^k$.

Считаем, что справедливы следующие оценки отклонения исходных данных

$$\|A_i^\delta - A_i^0\|_{L_2(0,1)} \leqslant \delta, \;\; \|B_i^\delta - B_i^0\|_{L_2(0,1)} \leqslant \delta, \;\; i = 0,1,\ldots,m,$$
$$\|c_i^\delta - c_i^0\|_{L_2(0,1)} \leqslant \delta, \;\; \|d_i^\delta - d_i^0\|_{L_2(0,1)} \leqslant \delta,$$

$$\|F^\delta - F^0\|_{L_2(0,1)} \leqslant \delta, \;\; \|B^\delta - B^0\|_{L_2(0,1)} \leqslant \delta,$$

которые в силу оценки (4.2) приводят к оценкам при некоторой постоянной $L > 0$, не зависящей от δ,

$$|f^\delta(u) - f^0(u)| \leqslant L\delta(1 + \|u\|), \; |A^\delta u - A^0 u| \leqslant L\delta(1 + \|u\|),$$

$$|g^\delta(u) - g^0(u)| \leqslant L\delta(1 + \|u\|), \;\; |h^\delta - h^0| \leqslant L\delta \;\; \forall\, u \in \mathcal{D} \subset L_2(0,1).$$

Введем функционал Лагранжа

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(u) + \langle \lambda, A^\delta u + h^\delta \rangle + \langle \mu, g^\delta(u) \rangle, \;\; u \in \mathcal{D}$$

и вогнутый двойственный функционал

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu), \;\; \lambda \in R^k, \; \mu \in R^m_+.$$

Примем обозначения

$$u^0 \equiv \operatorname{argmin}\{f^0(u) : \; u \in \mathcal{D}^0\}, \;\; u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta(u, \lambda, \mu) : \; u \in \mathcal{D}\}.$$

Здесь и ниже мы сохраняем также обозначение $\mathcal{D}^\epsilon$, принятое в разделе 1. Обозначим точку максимума в задаче

$$V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha(\delta)(|\lambda|^2 + |\mu|^2) \to \sup, \;\; (\lambda, \mu) \in R^k \times R^m_+,$$

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \;\; \alpha(\delta) \to 0, \;\; \delta \to 0$$

через $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)})$.

Применяя в данной ситуации в случае сильной выпуклости f^δ, теорему 2.1, получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Для того, чтобы существовало минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0_{OC}) *(и, значит, сходилось сильно к* u^0*), необходимо и достаточно существования последовательности двойственных переменных* $(\lambda^k, \mu^k) \in R^k \times R^m_+$, $k = 1, 2, \ldots$, *такой, что* $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются соотношения*

$$u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \;\; \epsilon^k \to 0, \;\; k \to \infty, \tag{4.3}$$

$$\langle (\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k], g^{\delta^k}(u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k])) \rangle \to 0, \;\; k \to \infty. \tag{4.4}$$

Более того, последовательность $u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k],\ k=1,2,\ldots,$ *есть искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0_{OC}), *сходящееся сильно к* u^0. *Как следствие предельных соотношений* (4.3), (4.4), *выполняется предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k,\mu^k)\to\sup_{(\lambda,\mu)\in R^k\times R^m_+}V^0(\lambda,\mu).$$

Одновременно каждая предельная точка последовательности двойственных переменных $(\lambda^k,\mu^k)\in R^k\times R^m_+,\ k=1,2,\ldots,$ *доставляет максимум в двойственной задаче* $V^0(\lambda,\mu)\to\max,\ (\lambda,\mu)\in R^k\times R^m_+$.

В качестве точек $(\lambda^k,\mu^k),\ k=1,2,\ldots,$ *могут быть выбраны точки* $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)},\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)})$, $k=1,2,\ldots,$ *где* $\delta^k>0$, $\delta^k\to0,\ k\to\infty$.

Заметим в заключение данного раздела, что для нахождения оптимальных управлений $u\in\mathcal{D}$, дающих минимум в задаче

$$L^\delta(u,\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)})\to\min,\ u\in\mathcal{D},\tag{4.5}$$

здесь может быть использован принцип максимума Понтрягина. Введем стандартное обозначение

$$H^\delta(t,x,u,\psi,\lambda,\mu)\equiv\langle\psi,F^\delta(t)x+B^\delta(t)u\rangle-$$
$$(\langle A^\delta_0(t)x,x\rangle+\langle B^\delta_0(t)u,u\rangle)-\langle\lambda,(C^\delta(t)x+D^\delta(t)u)\rangle-$$
$$\langle\mu,(\langle A^\delta_1(t)x,x\rangle+\langle B^\delta_1(t)u,u\rangle,\ldots,\langle A^\delta_m(t)x,x\rangle+\langle B^\delta_m(t)u,u\rangle)\rangle,$$

где $C^\delta(t)$ – $(n\times n)$ – матрица со строками $c^\delta_i(t)$, $i=1,\ldots,n$, $D^\delta(t)$ – $(n\times m)$ – матрица со строками $d^\delta_i(t)$, $i=1,\ldots,n$. Тогда в силу выпуклости задачи (4.5) можно утверждать, что каждое управление $u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$, дающее минимум в задаче (4.5), удовлетворяет следующему принципу максимума.

Теорема 4.2. *Для множителей Лагранжа* $\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\in R^k,\ \mu^{\delta,\alpha(\delta)}\in R^m_+$ *выполняется соотношение максимума*

$$H^\delta(t,x^\delta(t),u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}](t),\psi(t),\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)})=$$
$$\max_{v\in U}H^\delta(t,x^\delta(t),v,\psi(t),\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)})\quad \textit{при п.в. } t\in[0,1],$$

где $x^\delta(t) \equiv x^\delta[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]](t)$, *а через* $\psi(t)$, $t \in [0,1]$ *обозначено решение сопряженной задачи*

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H^\delta(t, x^\delta(t), u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}](t), \psi, \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}), \ \ \psi(1) = 0.$$

5 Применение устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера для решения некорректных задач

Принципиальной отличительной чертой устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера по сравнению с ее классическим аналогом является возможность непосредственного решения с ее помощью некорректных задач. Среди основных классов некорректных задач в учебной литературе принято, как правило, выделять задачи связанные с решением линейных алгебраических систем, линейных интегральных уравнений Фредгольма I-го рода и некорректных так называемых обратных задач (см., например, [1], [6]). Этой традиции мы следуем и в настоящем учебно-методическом пособии. Вопросам обсуждения возможностей решения с помощью устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера некорректных задач из указанных выше трех классов посвящены следующие три раздела.

5.1 Применение устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера для поиска нормальных решений линейных алгебраических систем

Рассмотрим произвольную линейную алгебраическую систему

$$Az = h, \ \ z \in Z = R^n, \ \ h \in H = R^m, \tag{5.1}$$

где $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)^*$, $h \equiv (h_1, \ldots, h_m)^*$ – векторы-столбцы, A – $(m \times n)$-матрица с элементами $a_{i,j}$, $A \equiv \{a_{i,j}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь n, m – любые фиксированные натуральные числа. Как известно, система (5.1) может быть однозначно разрешимой, вырожденной (и иметь бесчисленное множество решений) и несовместной. В случае несовместности системы ее решение понимается в обобщенном смысле. Напомним, что обобщенным решением (квазирешением) системы (5.1) называется вектор $z^* \in R^n$, который определяется как вектор минимизирующий невязку $|Az - h|$ на R^n. Хорошо известно (подробности можно найти, например, в [1, Раздел 1.5.5]), что обобщенные решения всегда существуют и множество всех обобщенных решений системы (5.1) совпадает со множеством обычных (классических) решений так называемой нормальной (по отношению к системе (5.1)) системы $A^*Az = A^*h$. Так как среди всех решений (в том числе и обобщенных) системы (5.1) приинято выделять (как правило) минимальное по модулю решение, которое принято называть нормальным решением, то мы не изменим этой традиции и в данном учебно-методическом пособии. Замечательным свойством нормального решения системы (5.1) является то, что оно всегда существует, всегда единственно и кроме того совпадает с нормальным обычным (классическим) решением нормальной системы $A^*Az = A^*h$ (все необходимые подробности, связанные с использованными выше свойствами обобщенных и классических решений линейных алгебраических систем можно найти в [1, Раздел 1.5.5]). Так как нормальное решение (возможно обобщенное) системы (5.1) всегда совпадает с нормальным классическим решением всегда совместной нормальной системы $A^*Az = A^*h$, будем без ограничения общности считать, что исходная система (5.1) является совместной и строить алгоритм поиска ее нормального решения на основе устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера. Главной проблемой поиска такого решения является некорректность задачи нахождения нормального решения линейной алгебраической системы. Доказательство этого факта и необходимые примеры, комментарии можно найти [1, Раздел 1.5.5]. Именно из-за некорректности задачи поиска нормального решения будем применять с целью его поиска алгоритм двойственной регуляризации в форме устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера. Итак, задача поиска нормального решения z^0 совместной линейной алгебраической системы с точными данными

$$A^0 z = h^0, \;\; z \in Z = R^n, \;\; h \in H = R^m,$$

и соответствующими оценками отклонения точных данных от приближенных (здесь $|\cdot|$ – обычный евклидов модуль)

$$|A^\delta - A^0| \leqslant C\delta, \ \ |h^\delta - h^0| \leqslant C\delta,$$

обеспечивающими в силу известной оценки $\|A\| \leqslant |A|$ (здесь $\|A\| \equiv \sup\limits_{|z|\neq 0} \frac{|Az|}{|z|} = \sup\limits_{|z|\leqslant 1} \frac{|Az|}{|z|}$ – так называемая операторная норма матрицы A, применяемая во всех сформулированных выше теоремах) нужные оценки

$$\|A^\delta - A^0\| \leqslant C\delta, \ \ |h^\delta - h^0| \leqslant C\delta,$$

может быть записана в форме задачи выпуклого программирования с сильно выпуклой целевой функцией вида (P^0)

$$(P^0_{LAS}) \qquad |z|^2 \to \min, \ \ A^0 z = h^0, \ \ z \in R^n.$$

Применяя для решения этой задачи алгоритм устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера 3.3 в итерационной форме приходим к следующей теореме.

Теорема 5.1. *Для того, чтобы в задаче (P^0_{LAS}) существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к z^0), необходимо, чтобы для последовательности двойственной переменной $\bar\lambda^k \in H = R^m$, $k = 1, 2, \ldots$, порождаемой итерационным процессом (2.14) с условиями согласования (2.15) выполнялись предельные соотношения*

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \ \ \epsilon^k \to 0, \quad \langle \bar\lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] - h^{\delta^k}\rangle \to 0, \ \ k \to \infty. \quad (5.2)$$

В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k]$ представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче (P^0_{LAS}) и имеет место также сходимость

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \to z^0, \ \ k \to \infty. \quad (5.3)$$

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\bar\lambda^k) \to \sup_{\lambda' \in R^m} V^0(\lambda'). \quad (5.4)$$

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0_{LAS}) существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно чтобы для последовательности двойственной переменной $\bar{\lambda}^k \in H = R^m$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом (2.14) *с условиями согласования* (2.15), *выполнялись предельные соотношения* (5.2). *В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0_{LAS}) и имеет место сходимость $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \to z^0$, $k \to \infty$, а также предельное соотношение* (5.4).

Конкретизируем здесь и соответствующее правило останова итерационного процесса, сформулированное в теореме 2.6. Пусть последовательности чисел δ^k, α^k, β^k, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (2.15). Зафиксируем следующее правило останова процесса (2.14)

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta^k \partial V^\delta(\bar{\lambda}^k) - 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k), \;\; k = 0, 1, 2, \dots; \; \bar{\lambda}^0 \in H = R^m,$$

при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$: при каждом $\delta > 0, \delta \leqslant \delta^1$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенство (2.16). Справедива

Теорема 5.2. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0_{LAS}) задача, справедливы предельные соотношения*

$$|z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]|^2 \to |z^0|^2, \;\; A^0 z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}] - h^0 \to 0, \;\; \delta \to 0,$$

а также (с учетом дифференцируемости функции $|z|^2$, $z \in R^n$) и предельное соотношение

$$z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}] - z^0 \to 0, \;\; \delta \to 0,$$

где $z^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]$ – результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (2.14). Другими словами, указанное правило останова порождает устойчивый по отношению к ошибкам исходных данных алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0_{LAS}).

Наконец, остановим свое внимание еще на одном важном моменте, касающемся приближенного решения линейной алгебраической системы (P^0_{LAS}) на основе идеологии двойственной регуляризации. Так как ограничение задачи (P^0_{LAS}) состоит только из одного векторного ограничения типа равенства $A^0 z = h^0$, а точка $z^\delta[\lambda]$ в этом случае вычисляется явным образом и равна $z^\delta[\lambda] = -\frac{1}{2}A^{\delta *}\lambda$, то, умножая обе части итерационной формулы (2.14) в пространстве двойственной переменной на матрицу $(-1/2)A^{\delta^k *}$, в силу предельного соотношения (5.3), получаем, что (2.14) преобразуется в итерационную формулу для решения задачи (P^0_{LAS}) в пространстве решений исходной линейной алгебраической системы:

$$z^{k+1} = z^k - (1/2)\beta^k(A^{\delta^k *}A^{\delta^k}z^k - A^{\delta^k *}h^{\delta^k}) - 2\beta^k\alpha^k z^k,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots;\ z^0 \in Z = R^n.$$

При этом имеет место предельное соотношение

$$z^k \to z^0,\ \ k \to \infty.$$

5.2 Применение устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма I-го рода

Рассмотрим классическую некорректную задачу решения линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$A^0[z](x) \equiv \int_a^b K^0(x,s)z(s)ds = h^0(x),\ \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{5.5}$$

где ядро $K^0(\cdot,\cdot)$ – непрерывная в заданном прямоугольнике $\Pi \equiv \{c \leqslant x \leqslant d;\ a \leqslant s \leqslant b\}$ функция, а в качестве пространств Z, H взяты соответственно пространства $L_2(a,b)$, $L_2(c,d)$. Считаем, что уравнение (5.5) разрешимо (теорему существования решения для уравнения (5.5 можно найти в [1, Раздел 1.5.4]), сохраняя для нормального решения обозначение z^0. К уравнению вида (5.5) сводятся самые разнообразные некорректные задачи, возникающие в естественных науках (см., например, [1]).

Вместо уравнения (5.5) в нашем распоряжении имеется его приближение

$$A^\delta[z](x) \equiv \int_a^b K^\delta(x,s)z(s)ds = u^\delta(x), \;\; c \leqslant x \leqslant d,$$

где $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число, ядро $K^\delta \in C[\Pi]$ и справедливы оценки

$$\|h^\delta - h^0\| \leqslant \delta, \;\; \|K^\delta - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \delta.$$

Рассмотрим сначала случай задачи (5.5), когда в качестве пространств Z, H, как уже сказано выше, выбраны пространства $Z = L_2(a,b)$, $H = L_2(c,d)$. В этом случае, как хорошо известно, A^0, $A^\delta : Z \to H$ – линейные непрерывные операторы.

Заметим, во-первых, что из оценки $\|K^\delta - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \delta$ следует оценка $\|A^\delta - A^0\| \leqslant \delta$ (см. оценку (2.1.10) в [1]), необходимая для применения при решении уравнения (5.5) абстрактной схемы двойственной регуляризации. Поэтому, с учетом оценки $\|h^\delta - h^0\| \leqslant \delta$, в данной ситуации мы можем опять применить абстрактные теоремы разделов 2, 3. Однако, прежде всего, в соответствии с теорией этих разделов перепишем задачу поиска нормального решения уравнения (5.5) в форме задачи выпуклого программирования вида (P^0) с сильно выпуклым целевым функционалом

$$(P^0_{LIE}). \qquad \|z\|^2 \to \min, \;\; A^0 z = h^0, \;\; z \in L_2(a,b) = Z$$

Применяя для решения этой задачи алгоритм устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера 3.3 в итерационной форме приходим к следующей теореме.

Теорема 5.3. *Для того, чтобы в задаче* (P^0_{LIE}) *существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к* z^0*), необходимо, чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar\lambda^k \in H = L_2(c,d)$*,* $k = 1, 2, \ldots,$ *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15) *выполнялись предельные соотношения*

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \;\; \epsilon^k \to 0, \;\; \langle \bar\lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] - h^{\delta^k} \rangle \to 0, \;\; k \to \infty. \quad (5.6)$$

В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k]$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0_{LIE}) *и имеет место также сходимость*

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \to z^0, \;\; k \to \infty. \tag{5.7}$$

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\bar\lambda^k) \to \sup_{\lambda' \in L_2(c,d)} V^0(\lambda'). \tag{5.8}$$

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0_{LIE}) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar\lambda^k \in H = L_2(c,d)$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15)*, выполнялись предельные соотношения* (5.6)*. В этом случае последовательность* $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P^0_{LIE}) *и имеет место сходимость* $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \to z^0$, $k \to \infty$, *а также предельное соотношение* (5.8)*.*

Совершенно аналогично правилу останова теоремы 5.2 здесь может быть выписано и соответствующее правило останова итерационного процесса теоремы 5.3 для решения интегрального уравнения (5.5) при фиксированном конечном уровне погрешности исходных данных. Заметим также, что, так как ограничение задачи (P^0_{LIE}), как и в случае задачи (P^0_{LAS}) состоит только из одного бесконечномерного ограничения типа равенства $A^0 z = h^0$, а точка $z^\delta[\lambda]$ в этом случае вычисляется явным образом и равна $z^\delta[\lambda] = -\frac{1}{2}A^{\delta *}\lambda$, где сопряженный оператор $A^{\delta^k *}$ задается выражением (оно получается в результате непосредственных вычислений в силу определения сопряженного оператора)

$$A^{\delta *}[z](s) \equiv \int_c^d K^\delta(x,s) z(x) dx, \;\; a \leqslant s \leqslant b,$$

то, действуя оператором $(-1/2)A^{\delta^k *}$ на обе части итерационной формулы (2.14) в пространстве двойственной переменной, в силу предельного соотношения (5.7), получаем, что (2.14) преобразуется в итерационную формулу в пространстве решений исходного линейного интегрального уравнения:

$$z^{k+1} = z^k - (1/2)\beta^k (A^{\delta^k *} A^{\delta^k} z^k - A^{\delta^k *} h^{\delta^k}) - 2\beta^k \alpha^k z^k,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots; \; z^0 \in Z = L_2(a, b).$$

При этом имеет место предельное соотношение

$$z^k \to z^0, \;\; k \to \infty.$$

Рассмотренный выше в данном разделе итерационный процесс решения линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода соответствует процессу регуляризации нулевого порядка решения этого уравнения на основе метода А.Н. Тихонова (см. [1, Раздел 2.3.5]), когда не используется информация о какой-либо гладкости решения исходного уравнения. В практических задачах такая информация, как правило, имеется. Обсудим в заключение этого раздела ситуацию, когда имеется информация об однократной дифференцируемости решения z^0, что соответствует так называемой регуляризации первого порядка (см. [1, Раздел 2.3.5]). Будем при этом считать, что решение $z^0(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$ принадлежит гильбертову пространству $V_2^1[a, b]$ абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, производные которых (существующие, как известно, при почти всех $s \in [a, b]$) суммируемы с квадратом на $[a, b]$. Определение этого пространства и его некоторые свойства можно найти в [1, Раздел 2.3.5]. Таким образом, считаем теперь, что в качестве пространств Z, H, выбраны пространства $Z = V_2^1[a, b]$, $H = L_2(c, d)$. В этом случае, как известно [1, Раздел 2.3.5], A^0, $A^\delta : Z \to H$ – также линейные непрерывные операторы.

Заметим при этом что из оценки $\|K^\delta - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \delta$ следует оценка $\|A^\delta - A^0\| \leqslant \delta$ и для новой пары пространств $Z = V_2^1[a, b]$, $H = L_2(c, d)$ (подробности в [1, Раздел 2.3.5]), необходимая для применения при решении уравнения (5.5) абстрактной схемы двойственной регуляризации. Поэтому, с учетом оценки $\|h^\delta - h^0\| \leqslant$

δ, мы можем в данной ситуации опять применить абстрактные теоремы разделов 2, 3. Однако, прежде всего, в соответствии с теорией этих разделов перепишем задачу поиска нормального решения уравнения (5.5) в форме задачи выпуклого программирования с сильно выпуклым целевым функционалом вида (P^0)

$$(P^0_{LIE1}) \qquad \|z\|^2 \to \min, \;\; A^0 z = h^0, \;\; z \in V_2^1[a,b] = Z.$$

Применяя для решения этой задачи опять алгоритм устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера 3.3 в итерационной форме приходим к следующей теореме.

Теорема 5.4. *Для того, чтобы в задаче* (P^0_{LIE1}) *существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно в* $V_2^1[a,b]$ *сходилось к* z^0*), необходимо, чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar\lambda^k \in H = L_2(c,d)$, $k = 1,2,\dots,$ *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15) *выполнялись предельные соотношения*

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \;\; \epsilon^k \to 0, \quad \langle \bar\lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] - h^{\delta^k}\rangle \to 0, \;\; k \to \infty. \quad (5.9)$$

В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\bar\lambda^k]$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0_{LIE1}) *и имеет место также сходимость в* $V_2^1[a,b]$

$$z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \to z^0, \;\; k \to \infty, \quad (5.10)$$

следствием которой является равномерная сходимость (подробности см. в [1, Раздел 2.3.5])

$$\|z^{\delta^k}[\bar\lambda^k] - z^0\|_{C[a,b]}, \;\; k \to \infty.$$

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\bar\lambda^k) \to \sup_{\lambda' \in L_2(c,d)} V^0(\lambda'). \quad (5.11)$$

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0_{LIE1}) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar\lambda^k \in H = L_2(c,d)$,

$k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15), *выполнялись предельные соотношения* (5.9). *В этом случае последовательность* $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P^0_{LIE1}) *и имеют место сходимости* $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \to z^0$, $\|z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - z^0\|_{C[a,b]}$, $k \to \infty$, *а также предельное соотношение* (5.11).

Совершенно аналогично правилу останова теоремы 5.2 здесь также может быть выписано и соответствующее правило останова итерационного процесса теоремы 5.3 для решения интегрального уравнения (5.5) для новой пары пространств $Z = V^1_2[a, b]$, $H = L_2(c, d)$ при фиксированном конечном уровне погрешности исходных данных. Наконец, как и в случае пары пространств $Z = L_2(a, b)$, $H = L_2(c, d)$, заметим, что, так как ограничение задачи (P^0_{LIE1}), как и в случае задачи (P^0_{LAS}) состоит только из одного бесконечномерного ограничения типа равенства $A^0 z = h^0$, а точка $z^\delta[\lambda]$ в этом случае вычисляется явным образом и равна $z^\delta[\lambda] = -\frac{1}{2}A^{\delta *}\lambda$, где сопряженный оператор $A^{\delta^k *}$ задается выражением (оно получается в результате непосредственных вычислений в силу определения сопряженного оператора, см. [1, Раздел 2.3.5])

$$A^{\delta *}[z](s) \equiv A^{\delta *}z(s) \equiv y^\delta[z](s), \;\; a \leqslant s \leqslant b,$$

с функцией $y^\delta[z] \in V^1_2[a, b]$, являющейся решением краевой задачи

$$y'' - y = -\int_c^d K^\delta(x, s) z(x) dx, \;\; y'(a) = y'(b) = 0,$$

то, действуя оператором $(-1/2)A^{\delta^k *}$ на обе части итерационной формулы (2.14) в пространстве двойственной переменной, в силу предельного соотношения (5.10), получаем, что (2.14) преобразуется в итерационную формулу в пространстве решений исходного линейного интегрального уравнения:

$$z^{k+1} = z^k - (1/2)\beta^k (A^{\delta^k *} A^{\delta^k} z^k - A^{\delta^k *} h^{\delta^k}) - 2\beta^k \alpha^k z^k,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots; \; z^0 \in Z = L_2(a, b).$$

При этом имеет место предельное соотношение в метрике пространства $Z = V_2^1[a,b]$

$$z^k \to z^0, \;\; k \to \infty$$

и, как следствие, в равномерной метрике

$$\|z^k - z^0\|_{C[a,b]}, \;\; k \to \infty.$$

5.3 Применение устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера для решения некорректных обратных задач

В качестве иллюстративного примера применения устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера для решения некорректных обратных задач рассмотрим так называемую обратную задачу финального наблюдения по нахождению неизвестных правой части уравнения и начального условия в третьей краевой задаче для уравнения теплопроводности. Необходимые сведения, связанные с важнейшим в современном естествознании понятием обратной задачи, можно найти в учебном пособии [1].

Пусть $V, W \subset R^1$ – ограниченные замкнутые сегменты, $Q_T \equiv (0,l) \times (0,T)$ – открытый цилиндр, $\mathcal{D} \equiv \{(v,w) \in L_2(Q_T) \times L_2(0,l) : v(x) \in V$ п.в. на $Q_T,\; w(x) \in W$ п.в. на $(0,l)\}$, $l > 0, T > 0$ – заданные числа.

Рассмотрим обратную задачу нахождения пары $\pi \equiv (v,w) \in \mathcal{D}$, состоящей из правой части уравнения v и начального условия w в однородной третьей краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 = g^\delta(x,t)v(x,t), \;\; z(x,0) = w(x), \; x \in (0,l), \quad (5.12)$$

$$\partial u(0,t)/\partial x - u(0,t) = 0, \quad \partial u(l,t)/\partial x + u(l,t) = 0, \; t \in [0,T]$$

по приближенно известному финальному (в некоторый момент времени T) наблюдению его решения $u^0(\cdot,T)$, где верхний индекс 0 означает, как и ранее, что решение соответствует точному заданию исходных данных. Здесь и ниже: $\delta \geqslant 0$ – характеризующее ошибку исходных данных число, $\delta_0 > 0$ – фиксированное число.

Под решением $u[\pi] \equiv u[v,w]$, соответствующим искомому воздействию $\pi \in \mathcal{D}$, краевой задачи (5.12) будем понимать так называемое слабое (обобщенное) решение из класса функций $V_2^{1,0}(Q_T)$. Класс функций $V_2^{1,0}(Q_T)$ определяется как класс суммируемых с квадратом функций, заданных на цилиндре Q_T, непрерывных по t в норме $L_2(0,l)$ и обладающих суммируемыми с квадратом на Q_T первыми частными обобщенными производными по x. Этот класс функций представляет собою банахово пространство с нормой (дополнительные подробности и соответствующую библиографию можно найти в [1])

$$| \, u \, |_{Q_T} \equiv \max_{t \in [0,T]} \|u(\cdot,t)\|_{2,(0,l)} + \|u_x\|_{2,Q_T}.$$

Напомним при этом, что суммируемая на Q_T функция y называется частной обобщенной производной по x первого порядка в смысле Соболева суммируемой на Q_T функции u, если для любой бесконечно дифференцируемой и финитной на Q_T (т.е. равной нулю вне некоторого компакта $Q \subset Q_T$) функции φ имеет место равенство

$$\int_{Q_T} u(x,t) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} dxdt = -\int_{Q_T} y(x,t)\varphi(x,t)dxdt.$$

Напомним, наконец, и определение слабого решения третьей краевой задачи (5.12).

Определение 5.1. *Пусть $g^\delta \in L_\infty(Q_T)$, $v \in L_2(Q_T)$, $w \in L_2(0,l)$. Обобщенным решением класса $V_2^{1,0}(Q_T)$, соответствующим начальному условию w и правой части v, однородной третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (5.12) называется функция $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющая при всех $\eta \in C^1(\overline{Q}_T)$ таких, что $\eta(\cdot,T) = 0$ на $[0,l]$, интегральному тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l (-u(x,t)\partial\eta(x,t)/\partial t + \partial u(x,t)/\partial x \partial\eta(x,t)/\partial x) dxdt -$$

$$-\int_0^T (u(0,t)\eta(0,t) + u(l,t)\eta(l,t))dt =$$

$$= \int_0^T \int_0^l g^\delta(x,t) v(x,t) \eta(x,t) dx dt + \int_0^l w(x) \eta(x,0) dx.$$

Справедлива следующая

Теорема 5.5. *Для любых $v \in L_2(Q_T)$, $w \in L_2(0,l)$ существует единственное в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ обобщенное решение $u \equiv u^\delta[v,w]$ однородной третьей начально-краевой задачи (5.12), причем справедлива априорная оценка*

$$\|u^\delta[v,w]\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\|v\|_{2,Q_T} + \|w\|_{2,(0,l)}),$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от v, w.

В данной постановке в общей ситуации поставленная обратная задача может иметь неединственное решение. Поэтому будем стремиться к приближенному нахождению нормального решения поставленной обратной задачи, т.е. решения с минимальной нормой $\|\pi\|_{2,Q_T\times(0,l)} \equiv \sqrt{\|v\|^2_{2,Q_T} + \|w\|^2_{2,(0,l)}}$, которое обозначим через $\pi^0 \equiv (v^0, w^0)$.

Обозначим через $h^\delta \in L_2(0,l)$ приближенное финальное наблюдение и будем считать, что выполняется оценка

$$\|h^\delta - h^0\|_{2,(0,l)} \leqslant \delta. \tag{5.13}$$

Можно заметить, что обратная задача нахождения нормального решения при наблюдении $h^0 \equiv u^0(\cdot,T) \in L_2(0,l)$ эквивалентна задаче выпуклого программирования с операторным ограничением типа равенства и сильно выпуклым целевым функционалом

$$(P^0_{IP}) \quad f^0(\pi) \to \inf, \quad A^0\pi = h^0, \ \ \pi \in \mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(0,l) \equiv Z,$$

где

$$f^0(\pi) \equiv \|\pi\|^2_{2,Q_T\times(0,l)}, \ \ A^0\pi \equiv u^0[\pi](\cdot,T) \equiv u^0[v,w](\cdot,T),$$

а линейный ограниченный оператор A^0 (доказательство этого факта требует ряда дополнительных сведений из теории функциональных пространств и по этой причине здесь опускается) действует из гильбертова пространства $L_2(Q_T) \times L_2(0,l) = Z$ в гильбертово пространство $L_2(0,l) = H$.

Можно показать, что оценка (5.13) в совокупности с априорной оценкой (5.5) обеспечивают (обоснование этого утверждения здесь опускается) соответствующую нужную оценку отклонения возмущенного линейного ограниченного оператора $A^\delta : Z \to H$ от невозмущенного аналога

$$\|A^\delta - A^0\| \leqslant C\delta$$

с независящей от δ некоторой постоянной $C > 0$, где $A^\delta\pi \equiv u^\delta[\pi](\cdot, T)$.

Введем функционал Лагранжа

$$L^\delta(\pi, \lambda) \equiv f^0(\pi) + \langle \lambda, A^\delta\pi - h^\delta \rangle, \;\; \pi \in \mathcal{D}$$

и вогнутый двойственный функционал

$$V^\delta(\lambda) \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}} L(\pi, \lambda), \;\; \lambda \in H = L_2(0,l).$$

Обозначим точку минимума функционала Лагранжа $L^\delta(\pi, \lambda)$, $\pi \in \mathcal{D}$ через $\pi^\delta[\lambda]$, а точку максимума в задаче

$$V^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2 \to \max, \; \lambda \in H, \; \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \; \alpha(\delta) \to 0, \; \delta \to 0$$

через $\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}$.

Применяя для решения этой задачи опять же алгоритм устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера 3.3 в итерационной форме приходим к следующей теореме.

Теорема 5.6. *Для того, чтобы в задаче* (P^0_{IP}) *существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к* π^0*), необходимо, чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar\lambda^k \in H = L_2(0,l)$, $k = 1, 2, \dots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15) *выполнялись предельные соотношения*

$$\pi^{\delta^k}[\bar\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \; \epsilon^k \to 0, \;\; \langle \bar\lambda^k, A^{\delta^k}\pi^{\delta^k}[\bar\lambda^k] - h^{\delta^k} \rangle \to 0, \;\; k \to \infty. \quad (5.14)$$

В этом случае последовательность $\pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$ *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P^0_{IP}) *и имеет место также сходимость*

$$\pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \to \pi^0, \ \ k \to \infty.$$

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\bar{\lambda}^k) \to \sup_{\lambda' \in L_2(0,l)} V^0(\lambda'). \tag{5.15}$$

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0_{IP}) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно чтобы для последовательности двойственной переменной* $\bar{\lambda}^k \in H = L_2(0,l)$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.14) *с условиями согласования* (2.15), *выполнялись предельные соотношения* (5.14). *В этом случае последовательность* $\pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P^0_{IP}) *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \to \pi^0, \ \ k \to \infty$, *а также предельное соотношение* (5.15).

Совершенно аналогично правилу останова теоремы 5.2 здесь может быть выписано и соответствующее правило останова итерационного процесса теоремы 5.6 для решения обратной задачи данного раздела при фиксированном конечном уровне погрешности исходных данных. Дополнительные подробности, связанные с решением на основе устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера обратной задачи настоящего раздела 5.3, обсуждение результатов конкретных численных экспериментов можно найти в [16], [17]

6 Описание программ решения задач оптимизации и некорректных задач на основе устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера

Описанные выше алгоритмы решения задач оптимизации и некорректных задач на основе секвенциальной теоремы Куна-Таккера в итерационной форме реализованы в виде программного комплекса. Он предназначен для решения систем линейных алгебраических уравнений, линейных интегральных уравнений Фредгольма 1 рода и обратных задач финального наблюдения для пространственно-одномерного уравнения теплопроводности.

Программный комплекс состоит из набора функций, работающих в среде Matlab и совместимых с ней системах (Octave, Scilab, FreeMat) и может выполняться на любой платформе, поддерживающей хотя бы одну из этих систем, в частности, наряду с Windows могут быть использованы Linux или Mac OS X.

Кратко опишем работу функций программного кмплекса при решении указанных выше канонических задач.

6.1 Система линейных алгебраических уравнений

Решается система линейных уравнений вида (см. раздел 5.1)

$$Ax = b, \quad x \in R^m, \quad b \in R^n, \tag{6.1}$$

где A — матрица размера $m \times n$, а под решением понимается псевдорешение с минимальной нормой.

Функция `solveLSDualRegular` решает систему линейных уравнений методом двойственной регуляризации, т.е. находит $x = -1/2A'\lambda^*$, где λ^* — решение задачи безусловной максимизации

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda) = V^{\delta}(\lambda) - \alpha|\lambda|^2 \to \max, \lambda \in R^n \tag{6.2}$$

Параметрами этой функции являются

- `A` — матрица системы,
- `b` — правая часть системы,
- `alpha` — параметр регуляризации α.

Результатом работы функции является пара значений (x^*, λ^*), состоящая из обобщенного решения (см. раздел 5.1) x^* системы (6.1) и отвечающей ему двойственной переменной λ^*. Максимизация функционала в (6.2) осуществляется посредством встроенной функции Matlab `fminsearch`.

Для решения системы линейных уравнений с помощью секвенциальной теоремы Куна-Таккера в итерационной форме (2.14) предназначена функция `solveLSIterRegular`.

Параметрами этой фукнции являются

- `A` — матрица системы,
- `b` — правая часть системы,
- `alpha_0` — параметр последовательности $\alpha_k = \alpha_0 k^{-1/6}$, $n = 1, 2, \ldots$,
- `beta_0` — параметр последовательности $\beta_k = \beta_0 k^{-3/5}$, $n = 1, 2, \ldots$,
- `stopfactor` — условия останова, семантика которого зависит от значения параметра `stoptype`,
- `stoptype` — тип условия останова. Если он равен 0, делается заранее заданное число итераций, которое задается параметром `stopfactor`. Если же он равен 1, итерации продолжаются до тех пор, пока ошибка задания исходных данных не станет меньше некоторого наперед заданного уровня погрешности δ, определенного параметром `stopfactor`.

Результатом работы функции является пара значений (x^*, λ^*), состоящая из обобщенного решения (см. раздел 5.1) x^* системы (6.1) и отвечающей ему двойственной переменной λ^*.

6.2 Линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

Решается линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода (см. раздел 5.2)

$$\int_a^b K(x,s)z(s) = u(x), \quad c \le x \le d, \tag{6.3}$$

где $z \in Z = V_2^1[a,b], u \in U = L_2(c,d)$.

Так же как и в случае решения системы линейных алгебраических уравнений, для решения уравнения (6.3) предлагается воспользоваться одной из двух функций. В данном разделе это фукнции `solveFredholmDualRegular` и `solveFredholmIterRegular`. Ниже кратко описываются их параметры

Параметрами функции `solveFredholmDualRegular` являются

- `K` — матрица значений ядра K,
- `u` — вектор значений правой части u,
- `a` — нижний предел интегрирования a,
- `b` — верхний предел интегрирования b,
- `ns` — n_s — количество точек разбиения отрезка $[a, b]$ по s,
- `c` — левая граница отрезка $[c, d]$,
- `d` — правая граница отрезка $[c, d]$,
- `nx` — n_x — количество точек разбиения отрезка $[c, d]$ по x.

Параметрами функции `solveFredholmIterRegular` являются

- `K` — матрица значений ядра K,
- `u` — вектор значений правой части u,
- `a` — нижний предел интегрирования a,
- `b` — верхний предел интегрирования b,
- `ns` — n_s — количество точек разбиения отрезка $[a, b]$ по s,
- `c` — левая граница отрезка $[c, d]$,
- `d` — правая граница отрезка $[c, d]$,
- `nx` — n_x — количество точек разбиения отрезка $[c, d]$ по x,
- `alpha_0` — параметр последовательности $\alpha_k = \alpha_0 k^{-1/6}$, $n = 1, 2, \dots,$

- `beta_0` — параметр последовательности $\beta_k = \beta_0 k^{-3/5}$, $n = 1, 2, \ldots$,
- `stopfactor` — условия останова, семантика которого зависит от значения параметра `stoptype`,
- `stoptype` — тип условия останова. Если он равен 0, делается заранее заданное число итераций, которое задается параметром `stopfactor`. Если же он равен 1, итерации продолжаются до тех пор, пока ошибка наблюдения не станет меньше некоторого наперед заданного уровня погрешности δ, задаваемого параметром `stopfactor`.

Для конечно-разностной аппроксимации интегрального уравнения (6.3) используется формула трапеций (первый порядок точности) и метод Симпсона (второй порядок точности). Подробности, связанные с теорией численного интегрирования могут быть найдены в [18] Открытый исходный код программного комплекса позволяет исполнителю работы использовать и другие методы численного интегрирования (к примеру, квадратурные формулы Ньютона-Котеса) для конечно-разностной аппроксимации интегрального уравнения (6.3).

Для приближенного решения уравнения Фредгольма 1-го рода (6.3) используются сеточные функции на равномерных сетках с шагом $h_s = (b-a)/(n_s-1)$ для переменной s (переменной интегрирования) и с шагом $h_x = (d-c)/(n_x-1)$ для переменной x.

Значения сеточных функций равны значениям соответствующих функций в узлах сетки. В частности, будем обозначать сеточную функцию, соответствующую решению уравнения через

$$\hat{z} = (z(s_1), z(s_2), \ldots, z(s_{n_s}))^T,$$

а функцию правой части уравнения через

$$\hat{u} = (u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_{n_x}))^T.$$

Напомним основные факты из теории численного интегрирования (см. например [18]).

С использованием формулы трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

интеграл приближается с первым порядком точности. Если задано равномерное разбиенение n точками, то формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2(n-1)} \cdot (f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots \\ + 2f(a+(n-2)h) + f(b)). \quad (6.4)$$

Приближая функцию не отрезками прямых, а совокупностью отрезков парабол можно получить более точный результат. В этом случае мы имеем дело с так называемым методом Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

В случае разбиения n точками формула примет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6(n-1)} \cdot (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots \\ + 4f(a+(n-2)h) + f(b)) \quad (6.5)$$

Следует отметить, что при использовании метода Симпсона число точек разбиения n должно быть нечетным. При четном числе формула не имеет смысла, а ее практические реализации могут давать непредсказуемые результаты.

Функции ядра $K(x,s), (x,s) \in [a,b] \times [c,d]$ интегрального оператора будет соответствать матрица значений

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \dots & K(x_1, s_{n_s}) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2) & \dots & K(x_2, s_{n_s}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_{n_x}, s_1) & K(x_{n_x}, s_2) & \dots & K(x_{n_x}, s_{n_s}) \end{pmatrix}. \qquad (6.6)$$

Интегральное уравнение Фредгольма (6.3) будет аппроксимироваться системой n_x линейных уравнений с n_s неизвестными вида

$$A\hat{z} = \hat{u}, \quad \hat{z} \in R^{n_s}, \quad \hat{u} \in R^{n_x},$$

где матрица A является поэлементным произведением интегрирующей матрицы I на матрицу $\hat{K}$ — сеточное ядро (6.6). Интегрирующая матрица I зависит от метода интегрирования и равна:

- в случае метода трапеций

$$I = \frac{h_s}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- для метода Симпсона

$$I = \frac{h_s}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Изменяя в коде функции

`private/getIntegrationMatrixAndRightPart.m`

интегрирующую матрицу `I` исполнитель лабораторной работы может самостоятельно экспериментировать с любыми другими методами численного интегрирования, включая методы, использующие неравномерные сетки.

Таким образом, для решения интегрального уравнения (6.3) могут быть непосредственно использованы функции

`solveLSDualRegular` и `solveLSIterRegular`

при условии задания в качестве параметров необходимых матрицы `A` и правой части `b`.

6.3 Обратная задача финального наблюдения для уравнения теплопроводности

Рассматривается задача поиска нормального (минимального по норме среди всех возможных, см. раздел 5.3) начального условия $v(\cdot)$ в задаче

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, L), \tag{6.7}$$
$$u(x, 0) = v(x), \quad x \in (0, L),$$
$$u_x(0, t) - u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) + u_x(L, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

по приближенно известному в финальный момент времени решению $u(\cdot, T) \equiv u_T(\cdot)$.

Для выполнения лабораторной работы предлагается воспользоваться одной из двух функций

`solveParabolicDualRegular`

и

`solveParabolicIterRegular`.

Ниже кратко описываются их параметры

Параметрами функции `solveParabolicRegular` являются

- `L` — величина L,
- `T` — величина T,
- `nx` — n_x — количество точек разбиения отрезка $[0, L]$ по x,
- `nt` — n_t — количество точек разбиения отрезка $[0, T]$ по t,
- `uT` — сеточное финальное наблюдение $u_T(\cdot)$,

- `alpha` — параметр регуляризации α.

Параметрами функции `solveParabolicIterRegular` являются

- `L` — величина L,
- `T` — величина T,
- `nx` — n_x — количество точек разбиения отрезка $[0, L]$ по x,
- `nt` — n_t — количество точек разбиения отрезка $[0, T]$ по t.
- `uT` — сеточное финальное наблюдение $u(\cdot, T)$,
- `alpha_0` — параметр последовательности $\alpha_k = \alpha_0 k^{-1/6}$, $n = 1, 2, \ldots$,
- `beta_0` — параметр последовательности $\beta_k = \beta_0 k^{-3/5}$, $n = 1, 2, \ldots$,
- `stopfactor` — условия останова, семантика которого зависит от значения параметра `stoptype`.
- `stoptype` — тип условия останова. Если он равен 0, делается заранее заданное число итераций, которое задается параметром `stopfactor`. Если же он равен 1, итерации продолжаются до тех пор, пока ошибка наблюдения не станет меньше некоторого наперед заданного уровня погрешности δ, задаваемого параметром `stopfactor`.

Как и в случае с уравнением Фредгольма сведем задачу (6.7) к системе линейных алгебраических уравнений. Будем использовать так называемую неявную схему, устойчивую при любых значениях n_x и n_t. Необходимые подробности, связанные с понятием неявной схемы могут быть найдены в [19].

Функцию $u(\cdot, t)$ для каждого t будем приближать сеточной функцией, заданной на равномерной сетке $\{x_j\}_{j=1}^{n_x}$, $x_j = (j-1)h_x$, где $h_x = L/(n_x - 1)$. Временной отрезок также заменим равномерной сеткой, состоящей из n_t точек. Шаг по времени будет равен $h_t = T/(n_t - 1)$. $t_i = (i-1)h_t$. Индексы сеточных функций будем писать внизу, первым — временной, вторым — пространственный.

Для приближения первой производной воспользуемся выражением первого порядка точности

$$u_t \approx \frac{\hat{u}_{i+1,j} - \hat{u}_{i,j}}{h_t}.$$

Вторая производная по пространственной переменной приближается выражением

$$u_{xx} \approx \frac{\hat{u}_{i+1,j-1} - 2\hat{u}_{i+1,j} + \hat{u}_{i+1,j+1}}{h_x^2}.$$

Для приближения граничных условий воспользуемся выражениями, имеющими второй порядок точности. Напомним, что производная по трем точкам в средней точке приближается выражением

$$u_x \approx \frac{\hat{u}_{i+1,j+1} - \hat{u}_{i+1,j-1}}{2h_x}.$$

Для приближения граничных условий задачи (6.7) нам потребуются следующие соотношения: выражение для производной в левой точке

$$u_x \approx \frac{-3\hat{u}_{i+1,j} + 4\hat{u}_{i+1,j+1} - \hat{u}_{i+1,j+2}}{2h_x}$$

и выражение для производной в правой точке

$$u_x \approx \frac{\hat{u}_{i+1,j-2} - 4\hat{u}_{i+1,j-1} + 3\hat{u}_{i+1,j}}{2h_x}.$$

Таким образом, зная значение фукнции на текущем шаге, значения на следующем шаге по времени находятся из системы уравнений

$$\hat{u}_{i+1j} - h_t\frac{\hat{u}_{i+1,j-1} - 2\hat{u}_{i+1,j} + \hat{u}_{i+1,j+1}}{h_x^2} = \hat{u}_{i,j},$$

$$\frac{-3\hat{u}_{i+1,1} + 4\hat{u}_{i+1,2} - \hat{u}_{i+1,2}}{2h_x} - u_{i+1,1} = 0,$$

$$\frac{\hat{u}_{i+1,n_x-2} - 4\hat{u}_{i+1,n_x-1} + 3\hat{u}_{i+1,n_x}}{2h_x} + u_{i+1,n_x} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n_t - 1, \quad j = 2, \ldots, n_x - 1.$$

Записывая эти выражения в компактной матричной форме получаем

$$\hat{u}_{n_t} = \overbrace{(P^{-1}B) \cdot \cdots \cdot (P^{-1}B)}^{n_t-1} \hat{u}_1,$$

где

$$\hat{u}_i = (\hat{u}_{i,1}, \hat{u}_{i,2}, \ldots, \hat{u}_{i,n_x})^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n_t,$$

а $(n_x \times n_x)$-матрицы P и B задаются выражениями

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2h_x} - 1 & \frac{2}{h_x} & -\frac{1}{h_x} & 0 & 0 \\ -\frac{h_t}{h_x^2} & 1 + 2\frac{h_t}{h_x^2} & -\frac{h_t}{h_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h_t}{h_x^2} & 1 + 2\frac{h_t}{h_x^2} & -\frac{h_t}{h_x^2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & -\frac{h_t}{h_x^2} & 1 + 2\frac{h_t}{h_x^2} & \frac{h_t}{h_x^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_x} & -\frac{2}{h_x} & \frac{3}{2h_x} + 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что произведение матриц $P^{-1}B$ является вырожденной матрицей, поэтому аппроксимирующая задача нахождения начальной функции $\hat{u}_1$ по решению в финальный момент времени $\hat{u}_{n_t}$ вида (6.1) при

$$A = \overbrace{(P^{-1}B) \cdot \cdots \cdot (P^{-1}B)}^{n_t-1}, \quad b = \hat{u}_{n_t},$$

как и исходная обратная задача финального наблюдения для уравнения (6.7) не является корректно поставленной. Как и раньше, для ее решения применяется секвенциальная теорема Куна-Таккера.

6.4 Описание замкнутой схемы численного эксперимента

Применяемый при проведении лабораторных работ программный комплекс может быть использован как для обработки данных реального эксперимента, так и для проведения численных экспериментов по так называемой замкнутой схеме. Поясним этот термин более подробно на примере задачи решения линейной алгебраической системы

$$A^0 z = h. \tag{6.8}$$

Прежде всего выбирается и фиксируется некоторый вектор z^0. Затем вычисляется значение вектора $h^0 = A^0 z^0$, который представляет собой (моделирует) точную правую часть системы.

Далее правая часть и матрица системы возмущается ошибкой δ, $\|h^\delta - h^0\| \le \delta$, $\|A^\delta - A^0\| \le \delta$. В случае численного эксперимента с реально измеренными исходными данными вектору h^δ и матрице A^δ соответствуют реально измеренные правая часть и матрица системы.

Для решения задачи $A^0 = w^0$ с приближенно известными правой частью h^0 и матрицей A^0 системы формально применяется метод двойственной регуляризации или секвенциальная теорема Куна-Таккера 2.14.

Замкнутая схема реализована в виде трех функций — по одной для каждой из трех возможных задач

`closedCircuitExperimentLS`,

`closedCircuitExperimentFredholm`,

`closedCircuitExperimentParabolic`.

Параметрами функции `closedCircuitExperimentLS` являются

- `solver` — функция решателя задачи, в качестве которой может быть использован один из методов `solveLSDualRegular` или `solveLSIterRegular`,
- `A` — матрица системы,

- `z0` — точное решение,
- `delta` — погрешность наблюдения,
- `varargin` — дополнительные параметры, передаваемые решателю, например параметр регуляризации или параметры условия останова.

Параметрами функции `closedCircuitExperimentFredholm` являются

- `solver` — функция решателя задачи, в качестве которой может быть использован один из методов `solveFredholmDualRegular` или `solveFredholmIterRegular`,
- `K` — матрица ядра интегрального уравнения,
- `z0` — точное решение,
- `a` — нижний предел интегрирования a,
- `b` — верхний предел интегрирования b,
- `ns` — n_s — количество точек разбиения отрезка $[a, b]$ по s,
- `c` — левая граница отрезка $[c, d]$,
- `d` — правая граница отрезка $[c, d]$,
- `nx` — n_x — количество точек разбиения отрезка $[c, d]$ по x,
- `delta` — погрешность наблюдения,
- `varargin` — дополнительные параметры, передаваемые решателю, например параметр регуляризации или параметры условия останова.

closedCircuitExperimentParabolic

- `solver` — функция решателя задачи, в качестве которой может быть использована одна из двух:

`solveParabolicDualRegular`
или
`solveParabolicIterRegular`,

- `L` — величина L,
- `T` — величина T,
- `nx` — n_x — количество точек разбиения по x,
- `nt` — n_t — количество точек разбиения по t,
- `v0` — точное решение,
- `delta` — погрешность наблюдения,
- `varargin` — дополнительные параметры, передаваемые решателю, например параметр регуляризации или параметры условия останова.

Результатом работы каждой функции является пара (z^*, λ^*), первая компонента которой z^* — приближенное решение исходной задачи, а вторая λ^* — соответствующая двойственная переменная — решение двойственной задачи.

7 Описание лабораторных работ с заданиями для их выполнения

7.1 Набор данных, необходимых для выполнения лабораторных работ, посвященных решению систем линейных алгебраических уравнений

Набор матриц систем:

1.
$$\begin{pmatrix} 0.211919 & 0.610396 & 0.459406 & 0.722623 & 0.097533 \\ 0.739421 & 0.487829 & 0.491899 & 0.419461 & 0.041207 \\ 0.025441 & 0.272756 & 0.912629 & 0.400632 & 0.928033 \\ 0.476141 & 0.739793 & 0.435384 & 0.741898 & 0.223844 \\ 0.68806 & 1.35019 & 0.89479 & 1.46452 & 0.32138 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 0.085741 & 0.083280 & 0.186529 & 0.198718 & 0.753783 \\ 0.988033 & 0.974816 & 0.448603 & 0.482631 & 0.631342 \\ 0.462987 & 0.557582 & 0.864613 & 0.356017 & 0.493912 \\ 0.345920 & 0.206663 & 0.857362 & 0.610726 & 0.996622 \\ 0.43166 & 0.28994 & 1.04389 & 0.80944 & 1.75040 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 0.787321 & 0.557226 & 0.084398 & 0.200427 & 0.029483 \\ 0.601140 & 0.112523 & 0.677085 & 0.164502 & 0.583100 \\ 0.601952 & 0.049650 & 0.833971 & 0.624010 & 0.547479 \\ 0.040479 & 0.425835 & 0.105596 & 0.897194 & 0.401556 \\ 0.82780 & 0.98306 & 0.18999 & 1.09762 & 0.43104 \end{pmatrix}$$

7.2 Набор данных, необходимых для выполнения лабораторных работ связанных с решением с интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

Набор ядер интегрального уравнения:

1. $\dfrac{1}{1+100(s-x)^2}$,
2. $e^{-80(s-x-0,5)^2}$,
3. $\begin{cases} (a-s)x, a \le x \le s, \\ s(b-x), s \le x \le b. \end{cases}$

Набор точных решений:

1. $e^{-\frac{(s-0,5)^2}{0,06}}$,
2. $\dfrac{e^{\frac{(s-0,3)^2}{0,03}} + e^{\frac{(s-0,7)^2}{0,03}}}{0,09550408} - 0,052130913$,
3. $1-s^2$,
4. $\mathrm{arctg}(s), s \in [-1;1]$,
5. $4s(1-s)$,

6. $20(s-0,5)(s)(s+0,5), s \in [-0,7; 0,7]$,

7. $\dfrac{1}{100s^2+1}, s \in [-1; 1]$.

7.3 Лабораторная работа I

Тема работы Визуализация возможности применения секвенциальной теоремы Куна-Таккера для решения приближенно заданной системы линейных алгебраических уравнений.

Цель работы Иллюстрация в интерактивном режиме возможности и эффективности применения секвенциальной теоремы Куна-Таккера для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Описание работы Работа состоит из двух частей.

1) В первой части работы, прежде всего, предстоит визуально убедиться в необходимости применения методов регуляризации для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Неустойчивость классической двойственной схемы продемонстрируем на примере системы двух линейных алгебраических уравнений

$$Ax = h, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для этого формально применим функцию программного комплекса `solveLSDualRegular` с параметрами

```
A = [1 1; 0 delta^2];
b = [1;delta];
alpha = 0.0;
```

Задавая убывающую последовательность величин δ

```
delta = 0.1;
delta = 0.001;
delta = 0.0001;
delta = 0.00001;
```

исполнитель работы визуально наблюдает неустойчивое поведение формального решения (x_1, x_2).

Использование секвенциальной теоремы Куна-Таккера в случае, если двойственные переменные не выбираются в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации, равносильна применению классического алгорима Удзавы [20]. Продемонстрируем его неустойчивое поведение на примере следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = h, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся для ее решения функцией программного комплекса `solveLSIterRegular`, задав

```
A = [1 1; 0 delta^{1/3}];
b = [1;delta];
alpha_0 = 0.0;
beta_0 = 0.8;
stopfactor=1000;
stoptype=1;
```

Задавая убывающую последовательность величин δ

```
delta = 1e-1;
delta = 1e-2;
delta = 1e-3;
delta = 1e-4;
delta = 1e-5;
delta = 1e-6;
delta = 1e-7;
delta = 1e-8;
delta = 1e-9;
```

исполнитель работы визуально наблюдает неустойчивое поведение формального решения (x_1, x_2). Если же задать ненулевое значение параметра α_0, например `alpha_0 = 0.1`, можно наблюдать приближение решений (x_1, x_2) к решению невозмущенной задачи, равное $(0,02,\ 0,14)$.

2) Во второй части работы исполнителю работы предлагается организовать эксперимент по замкнутой схеме, т.е.:

1. Выбрать матрицу правой части в соответствии со своим вариантом задания и ввести ее в компьютер.

2. Задать вектор x_1, получить вектор правой части, умножая матрицу системы A на вектор x_1
$$b^0 = Ax_1.$$

3. Найти нормальное решение x_0 невозмущенной системы как решение задачи
$$|x|^2 \to \min, \quad x \in R^m, \quad Ax = b^0.$$
Для этого можно воспользоваться функцией системы Matlab `lsqr`
$$\mathtt{x0} = \mathtt{lsqr}(\mathtt{A}, \mathtt{b0}).$$

4. Прибавить к невозмущенной правой b^0 части равномерно распределенную ошибку таким образом, чтобы выполнялось соотношение $|b^\delta - b^0| \leq \delta$ и получить возмущенную правую часть b^δ. Прибавить к матрице системы равномерно распределенную ошибку таким образом, чтобы выполнялось соотношение $|A^\delta - A^0| \leq \delta$ и получить возмущенную матрицу системы A^δ.

5. Формально применить секвенциальную теорему Куна-Таккера 5.1 с правилом останова, сформулированным в теореме 5.2 для решения системы линейных алгебраических уравнений с возмущенными значениями A^δ, b^δ матрицы системы и правой части и сравнить решение x^* с выбранным точным решением x_0.

Вариант задания соответствует номеру системы в разделе 7.1.

7.4 Лабораторная работа II

Название работы Визуализация процесса выбора оптимальной конечно-разностной сетки при решении интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с помощью секвенциальной теоремы Куна-Таккера.

Цель работы Иллюстрация в интерактивном режиме необходимости и важности процесса выбора оптимального для решения некорректной задачи количества узлов конечно-разностной сетки.

Описание работы Работа состоит из двух частей.

1) В первой части работы, прежде всего, предстоит визуально убедиться в необходимости применения метода регуляризации для решения линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для этого с целью "визуализации" такой необходимости следует воспользоваться функцией программного комплекса

`closedCircuitExperimentFredholm`,

используя метод

`solveFredholmDualRegular`,

подставить в программу $\alpha = 0$ в качестве параметра регуляризации, и проверить, проявляется ли эффект неустойчивости в виде резких изменений от "больших" отрицательных до "больших" положительных значений приближенного решения.

Для этого, во-первых, необходимо указать в системе Matlab значения параметров `a, b, ns, c, d, nx` следующим образом

```
a = 0;
b = 1;
ns = 27;
c = 0;
d = 1;
nx = 27;
```

Далее, необходимо задать функции ядра и точного решения, например так

```
Kfun = @(x,s) (1./(1+100.*(s-x).^2));
zfun= @(s) (exp(-(s-0.5).^2./0.06));
```

Обратите внимание, что операции умножения, деления и возведения в степень должны быть "поэлементными". Кроме того, необходимо "аппроксимировать" эти функции

```
[K,x,s] = approxFredholmKernel(Kfun, a,b,ns, c,d,nx);
[z0,~] = approxFunction(zfun,a,b,ns);
```

После указанных предварительных действий может быть непосредственно использован метод `closedCircuitExperimentFredholm`.

2) Вторая часть работы заключается в непосредственном подборе оптимальной конечно-разностной сетки.

Исполнителю работы необходимо определить, начиная с какого количества узлов сетки численное приближенное решение перестает "существенно улучшаться". С этой целью, начиная с наименьших равных между собой количеств узлов сеток по s и по x, следует одновременно измельчать с шагом, равным 1, разбиение отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$.

Список заданий работы

Задание 1. Ядро №1, точное решение №1.
Задание 2. Ядро №1, точное решение №2.
Задание 3. Ядро №1, точное решение №3.
Задание 4. Ядро №1, точное решение №4.
Задание 5. Ядро №1, точное решение №5.
Задание 6. Ядро №1, точное решение №6.
Задание 7. Ядро №1, точное решение №7.
Задание 8. Ядро №2, точное решение №1.
Задание 9. Ядро №2, точное решение №2.
Задание 10. Ядро №2, точное решение №3.
Задание 11. Ядро №2, точное решение №4.
Задание 12. Ядро №2, точное решение №5.
Задание 13. Ядро №2, точное решение №6.
Задание 14. Ядро №2, точное решение №7.

Задание 15. Ядро №3, точное решение №1.
Задание 16. Ядро №3, точное решение №2.
Задание 17. Ядро №3, точное решение №3.
Задание 18. Ядро №3, точное решение №4.
Задание 19. Ядро №3, точное решение №5.
Задание 20. Ядро №3, точное решение №6.
Задание 21. Ядро №3, точное решение №7.

7.5 Лабораторная работа III

Тема работы Визуализация процесса выбора оптимального параметра δ_1 в условии останова (2.16) при решении уравнения Фредгольма первого рода с помощью секвенциальной теоремы Куна-Таккера.

Цель работы Иллюстрация в интерактивном режиме необходимости и важности процесса выбора оптимального для решения некорректной задачи параметра условия останова.

Описание работы Работа состоит из двух частей.

1) В первой части работы, прежде всего, предстоит визуально убедиться в необходимости применения метода регуляризации для решения линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для этого с целью "визуализации" такой необходимости следует воспользоваться функцией программного комплекса

`closedCircuitExperimentFredholm`,

используя метод

`solveFredholmDualRegular`,

подставить в программу $\alpha = 0$ в качестве параметра регуляризации, и проверить, проявляется ли эффект неустойчивости в виде резких изменений от "больших" отрицательных до "больших" положительных значений приближенного решения.

Для этого, во-первых, необходимо указать в системе Matlab значения параметров `a, b, ns, c, d, nx` следующим образом

```
a = 0;
b = 1;

ns = 27;
c = 0;
d = 1;
nx = 27;
```

Далее, необходимо задать функции ядра и точного решения, например так

```
Kfun = @(x,s) (1./(1+100.*(s-x).^2));
zfun= @(s) (exp(-(s-0.5).^2./0.06));
```

Обратите внимание, что операции умножения, деления и возведения в степень должны быть “поэлементными”. Кроме того, необходимо “аппроксимировать” эти функции

```
[K,x,s] = approxFredholmKernel(Kfun, a,b,ns, c,d,nx);

[z0,~] = approxFunction(zfun,a,b,ns);
```

После указанных предварительных действий может быть непосредственно использован метод `closedCircuitExperimentFredholm`.

2) Вторая часть работы заключается в непосредственном подборе параметра δ_1 условия останова (2.16), удовлетворяющего следующему критерию.

Исполнителю работы необходимо определить, начиная с какого значения параметра условия останова δ_1 численное приближенное решение перестает “существенно улучшаться”. С этой целью, начиная со значения $\delta_1 = 0.1$ следует уменьшать значение парамерта δ_1 в 2 раза до значения $\delta_1 = 1 \cdot 10^{-9}$.

Список заданий работы

Задание 1. Ядро №1, точное решение №1.
Задание 2. Ядро №1, точное решение №2.
Задание 3. Ядро №1, точное решение №3.
Задание 4. Ядро №1, точное решение №4.
Задание 5. Ядро №1, точное решение №5.
Задание 6. Ядро №1, точное решение №6.
Задание 7. Ядро №1, точное решение №7.
Задание 8. Ядро №2, точное решение №1.
Задание 9. Ядро №2, точное решение №2.
Задание 10. Ядро №2, точное решение №3.
Задание 11. Ядро №2, точное решение №4.
Задание 12. Ядро №2, точное решение №5.
Задание 13. Ядро №2, точное решение №6.
Задание 14. Ядро №2, точное решение №7.
Задание 15. Ядро №3, точное решение №1.
Задание 16. Ядро №3, точное решение №2.
Задание 17. Ядро №3, точное решение №3.
Задание 18. Ядро №3, точное решение №4.
Задание 19. Ядро №3, точное решение №5.
Задание 20. Ядро №3, точное решение №6.
Задание 21. Ядро №3, точное решение №7.

7.6 Лабораторная работа IV

Название работы Визуализация процесса выбора оптимальной конечно-разностной сетки при решении обратной задачи финального наблюдения для уравнения теплопроводности (6.7).

Цель работы Иллюстрация в интерактивном режиме необходимости и важности процесса выбора оптимального для решения некорректной задачи количества узлов конечно-разностной сетки.

Описание работы Работа состоит из двух частей.

1) В первой части работы, прежде всего, предстоит визуально убедиться в необходимости применения метода регуляризации для решения обратной задачи финального наблюдения для уравнения теплопроводности (6.7). Для этого с целью "визуализации" такой необходимости следует воспользоваться функцией программного комплекса

`closedCircuitExperimentParabolic`,

используя метод

`solveParabolicDualRegular`,

подставить в программу $\alpha = 0$ в качестве параметра регуляризации, и проверить, проявляется ли эффект неустойчивости в виде резких изменений от "больших" отрицательных до "больших" положительных значений приближенного решения.

Для этого, во-первых, необходимо указать в системе Matlab значения параметров `L,T,nt,nx` следующим образом

```
L = 1;
nx = 27;
T = 0.1;
nt = 27;
```

Далее, необходимо задать функцию точного решения, например так

```
zfun= @(s) (exp(-(s-0.5).^2./0.06));
```

Обратите внимание, что операции умножения, деления и возведения в степень должны быть "поэлементными". Кроме того, необходимо "аппроксимировать" эту функцию

```
[z0,~] = approxFunction(zfun,0,L,nx);
```

После указанных предварительных действий может быть непосредственно использован метод `closedCircuitExperimentParabolic`.

2) Вторая часть работы заключается в непосредственном подборе оптимальной конечно-разностной сетки.

Исполнителю работы необходимо определить, начиная с какого количества узлов сетки численное приближенное решение перестает "существенно улучшаться". С этой целью, начиная с наименьших равных между собой количеств узлов сеток по t и по x, следует одновременно измельчать с шагом, равным 1, разбиение отрезков $[0, T]$ и $[0, L]$.

Список заданий работы

Задание 1. Точное решение №1.
Задание 2. Точное решение №2.
Задание 3. Точное решение №3.
Задание 4. Точное решение №4.
Задание 5. Точное решение №5.
Задание 6. Точное решение №6.
Задание 7. Точное решение №7.

7.7 Лабораторная работа V

Тема работы Визуализация процесса выбора оптимального параметра δ_1 в условии останова (2.16) при решении обратной задачи финального наблюдения для уравнения теплопроводности (6.7) с помощью секвенциальной теоремы Куна-Таккера.

Цель работы Иллюстрация в интерактивном режиме необходимости и важности процесса выбора оптимального для решения некорректной задачи параметра условия останова.

Описание работы Работа состоит из двух частей.

1) В первой части работы, прежде всего, предстоит визуально убедиться в необходимости применения метода регуляризации для решения обратной задачи финального наблюдения для уравнения теплопроводности (6.7). Для этого с целью "визуализации" такой необходимости следует воспользоваться функцией программного комплекса

`closedCircuitExperimentParabolic`,

используя метод

`solveParabolicDualRegular`,

подставить в программу $\alpha = 0$ в качестве параметра регуляризации, и проверить, проявляется ли эффект неустойчивости в виде резких изменений от "больших" отрицательных до "больших" положительных значений приближенного решения.

Для этого, во-первых, необходимо указать в системе Matlab значения параметров `L,T,nt,nx` следующим образом

```
L = 1;
nx = 27;
T = 0.1;
nt = 27;
```

Далее, необходимо задать функцию точного решения, например так

```
zfun= @(s) (exp(-(s-0.5).^2./0.06));
```

Обратите внимание, что операции умножения, деления и возведения в степень должны быть "поэлементными". Кроме того, необходимо "аппроксимировать" эту функции

```
[z0,~] = approxFunction(zfun,0,L,nx);
```

После указанных предварительных действий может быть непосредственно использован метод `closedCircuitExperimentParabolic`.

2) Вторая часть работы заключается в непосредственном подборе параметра δ_1 условия останова (2.16), удовлетворяющего следующему критерию.

Исполнителю работы необходимо определить, начиная с какого значения параметра δ_1 условия останова численное приближенное решение перестает "существенно улучшаться". С этой целью, начиная со значения $\delta_1 = 0.1$ следует уменьшать значение парамерта δ_1 в 2 раза до значения $\delta_1 = 1 \cdot 10^{-9}$.

Список заданий работы

Задание 1. Точное решение №1.
Задание 2. Точное решение №2.
Задание 3. Точное решение №3.
Задание 4. Точное решение №4.
Задание 5. Точное решение №5.
Задание 6. Точное решение №6.
Задание 7. Точное решение №7.

Список литературы

[1] Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.– 289 с.

[2] Зотов Ю.Н., Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Применение методов регуляризации для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (с программным комплексом и описанием лабораторных работ). Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. – 84 с.

[3] Hadamard J. Le problème de Caucy et les èquations aux derivees partielles linèaires hyperbolicues. Paris: Hermann, 1932 [Рус. перевод: Адамар Ж. – Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. – 352 с.].

[4] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.151. №3. – С. 501–504.

[5] Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.153. №1. – С. 49–52.

[6] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.– 288 с.

[7] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. – 400 с.

[8] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[9] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.– 624 с.

[10] Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. – 264 с.

[11] Сумин М.И. Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т.47. № 4. – С. 602–625.

[12] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. – 520 с.

[13] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. – 328 с.

[14] Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т.51. № 9. – С. 1594–1615.

[15] Sumin M.I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications // Applied Mathematics. – 2012. – Special issue "Optimization".

[16] Кутерин Ф.А., Сумин М.И. О регуляризованном алгоритме Удзавы в обратной задаче финального наблюдения для параболического уравнения // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. – 2011. № 2 (87). – С. 309–319.

[17] Кутерин Ф.А. Двойственная регуляризация в обратной задаче финального наблюдения для параболического уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. – 2011. № 3(2). – С. 108–114.

[18] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. – 432 с.

[19] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. – 553 с.

[20] Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1990 — 448 с. ISBN 5-02-013980-7.