МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им.Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Д.С. Малышев

КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ГРАНИЦЫ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ В СЕМЕЙСТВЕ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010500 «Прикладная математика и информатика», по направлению подготовки 010400 «Информационные технологии» и специальности 080801 «Прикладная информатика» и специализирующихся в области дискретной математики и математической кибернетики, а также для аспирантов, обучающихся по специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Нижний Новгород 2011

УДК 519.17
ББК В12
Г-90

Г-90 Малышев Д.С. Комбинаторные методы формирования границы эффективной разрешимости дискретных задач в семействе наследственных классов графов: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. — 45 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Д.В. Баландин

Учебно-методическое пособие Малышева Д.С. содержит новые результаты, относящиеся к вопросам сложностной стратификации наследственных классов графов для некоторых экстремальных графовых задач. Изучение вычислительной сложности задач в таких классах ведется на основе метода «критического» класса графов. В пособии содержится подробное изложение причин интереса к теории таких классов графов, соответствующие определения с комментариями, а также результаты из диссертации автора. Для самоконтроля понимания изложенного материала в пособие включены вопросы и задачи.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Информационные технологии», а также для аспирантов, обучающихся по специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика».

УДК 519.17
ББК В12

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2011
© Малышев Д.С., 2011

Оглавление

Введение

Математике всегда было присуще стремление разрабатывать эффективные методы решения как можно более широких классов задач. Многолетний мировой опыт развития теории дискретных и комбинаторных задач и практика их решения показали, что общность метода и его эффективность находятся в известном антагонизме. Вместе с тем, очень важно знать, можно ли в принципе надеяться на создание достаточно общих и эффективных методов или надо сознательно идти по пути разбиения задач на более узкие классы и, используя их специфику, разрабатывать для них эффективные алгоритмы.

Вообще говоря, большинство комбинаторных задач допускает решение при помощи некоторого процесса перебора. Однако, время работы такой процедуры может быть весьма велико — быть экспоненциальным от размеров входных данных задачи. Для некоторых конкретных задач удается построить алгоритмы решения, не требующие полного перебора (например, для задачи о наибольшем паросочетании в графе или для задачи распознавания простоты числа). Однако число таких задач оказывается небольшим. Анализ трудностей, встретившихся на пути создания эффективных методов решения задач дискретной математики, приводит к проблеме элиминации (исключения) перебора. Иными словами, речь идет о принципиальной возможности найти решение задачи, не перебирая всех или почти всех вариантов решений в задаче. Данная проблема имеет не только математическое, но и глубоко познавательное значение. Оно состоит в том, что при поиске эффективных методов решения широкого класса задач необходимо учитывать их отсутствие, т.е. уметь вовремя ограничивать «аппетит», признав существование «труднорешаемых» задач.

Развитие теории сложности вычислений способствовало формированию фактических стандартов эффективной разрешимости и «труднорешаемости». В соответствии с этой концепцией под быстрой (эффективной) разрешимостью данной массовой задачи понимается возможность ее решения на «стандартном» компьютере — детерминированной машине Тьюринга за время, ограниченное полиномом от длины входных данных. В то же время, имеется ряд «неподдающихся» (называемых в теории сложности вычислений NP-полными) задач, для которых в настоящее время не получено быстрых алгоритмов. Вместе с тем, известные теоретические результаты дают основания предполагать, что таких алгоритмов вообще не существует (хотя до сих пор это строго не доказано, т.е. проблема существования «труднорешаемых» является открытой). Одним из возможных путей преодоления вычислительной сложности NP-полных задач является сужение (анализ их специальных частных случаев) путем наложения дополнительных ограничений на структуру и значения исходных данных задач. Можно с уверенностью утверждать, что изучение таких ограничений является одной из центральных проблем современной Theoretical Computer Science. К настоящему времени накоплено огромное количество результатов о полиномиальной разрешимости и NP-полноте. Направляющие мотивы получения новых сведений такого рода могут быть самыми разнообразными, но можно выделить два наиболее распространенных:

1. Поиск более широких случаев полиномиальной разрешимости
2. Поиск NP-полных сужений для уже известных «сложных» случаев

Вместе с тем, при рассмотрении входных данных какой-либо дискретной экстремальной задачи можно поставить целью выявление пределов, до которых возможны расширения полиномиальной сложности и сужения с «противоположным» сложностным статусом. Тем самым, для заданной задачи речь фактически идет об определении границы между полиномиальной разрешимостью и NP-полнотой. Вместе с тем, проблематика нахождения границы является только нарождающейся, актуальность которой несомненна. Настоящее пособие имеет цель посвятить читателя в круг существующих здесь проблем, познакомить его как с уже имеющимися, так и недавно полученными автором этих строк и другими учеными результатами.

Глава 1

Задачи, алгоритмы, сложность и классы сложности

В начале изложим основные понятия из теории сложности вычислений, необходимые для понимания дальнейшего изложения. Начнем с понятия *массовой задачи*. Под такой задачей понимается некоторый вопрос, на который необходимо дать ответ. Задача содержит несколько параметров, конкретные значения которых не определены. Некоторые из этих параметров должны принимать бесконечное множество значений (отсюда и массовость задачи). *Индивидуальная задача* получается из заданной массовой задачи путем присвоения ее параметрам конкретных значений.

В качестве примера рассмотрим две такие классические графовые задачи, как задача о независимом множестве и задача о k-раскраске. Дадим формулировки обеих задач.

Независимым множеством в графе называется множество его попарно несмежных вершин. Независимое множество называется *наибольшим*, если оно содержит максимально возможное количество вершин. *Задача о независимом множестве* состоит в отыскании наибольшего независимого множества в заданном графе.

Раскраска вершин графа в k цветов (или просто *k-раскраска вершин*) — некоторое назначение цветов его вершинам. Обычно множество цветов совпадает с начальным отрезком натурального ряда $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Раскраска называется *правильной*, если смежным вершинам графа соответствуют различные цвета. *Задача о k-раскраске вершин* для заданного графа состоит в том, чтобы определить, существует правильная раскраска множества его вершин в k цветов.

Параметром каждой из обеих указанных задач является входной граф. Соответствующие индивидуальные задачи получаются из массовых путем рассмотрения конкретных графов. Для графа, изображенного на рисунке 1.1 наибольшее независимое множество есть $\{2, 3, 6\}$. Правильная раскраска вершин графа в 5 цветов представлена на рисунке 1.2.

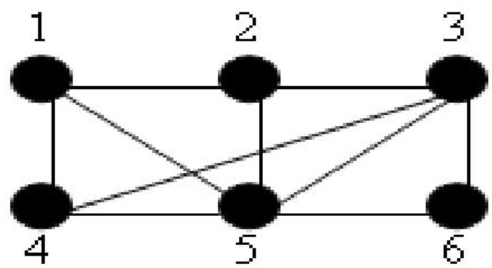

Рис. 1.1: Решение задачи о независимом множестве

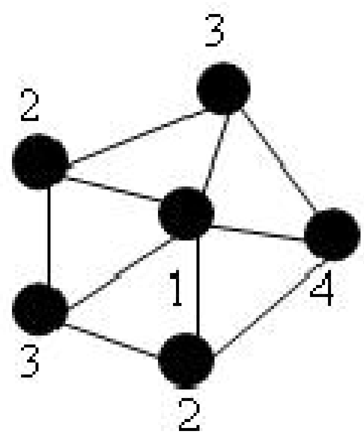

Рис. 1.2: Решение задачи о раскраске

Задача о независимом множестве, как и задача о раскраске являются математическими моделями экстремальных задач теории расписаний, теории размещений и т.п. Рассмотрим соответствующий пример. Предположим, что имеется ряд работ (заявок), а также обслуживающее устройство («процессор»), выполняющее эти работы. Некоторые пары заявок по тем или иным причинам одновременно обслуживаться не могут. Для простоты будем предполагать, что в любой момент времени может обслуживаться любое допустимое множество работ. Какое наибольшее количество заявок может быть обслужено за единицу времени и за какое минимальное время могут быть выполнены все работы? Для решения обеих задач рассмотрим граф, вершины которого соответствуют работам, а ребра соединяют те вершины, для которых соответствующие работы одновременно выполняться не могут. Тогда для данного графа первая из задач состоит в вычислении наибольшего независимого множества, а вторая в вычислении минимального k, для которого граф допускает k-раскраску вершин.

Под *алгоритмом* понимается общая, выполняемая шаг за шагом, процедура решения задачи. Решение данной массовой задачи алгоритмом предполагает, что он применим к каждой из соответствующих индивидуальных задач и обязательно выдает правильное их решение. Алгоритм предполагает описание на некотором формальном языке, синтаксис которого связан с используемой моделью вычислений. Грубо говоря, *модель вычислений* — некоторый «компьютер», позволяющий решать индивидуальную задачу по имеющемуся рецепту — программе-алгоритму. Отметим, что многие модели вычислений эквивалентны между собой с точки зрения выразительных свойств (при достаточно богатом кодировании и декодировании входной информации), поэтому при анализе характеристик алгоритмов выбирают только одну из них. Как правило, это Тьюрингова модель обработки информации [6].

Вообще говоря, нам нужен «оптимальный» среди алгоритмов, решающих данную задачу. Поскольку в реальных приложениях ограничения по времени являются доминирующим фактором, то основное внимание сосредотачивают на времени работы алгоритма и «оптимальность» понимают в смысле быстродействия.

Время работы алгоритма принято выражать в виде функции от одной переменной, называемой *длиной входа задачи.* Данная переменная характеризует «размер» индивидуальной задачи, т.е. объем входных данных, требуемых для ее описания. Часто к измерению размеров индивидуальных задач подходят неформально, поскольку они зависят от способа кодирования входной информации. Например, граф с n вершинами и m ребрами можно задать двоичными матрицами смежности и инцидентности (размерами, соответственно, $n \times n$ и $n \times m$), а можно списком смежности [8], требующему память, пропорциональную $m + n$ бит.

Временной сложностью алгоритма (*трудоемкостью алгоритма*) называется функция, которая каждой входной длине l ставит в соответствии максимальное (по всем индивидуальным задачам длины l) количество операций, затрачиваемых алгоритмом. Разумеется, данная функция не определена, пока не выбрана схема кодирования входной информации, определяющая входную длину. Однако, такие детали оказываются незначительными с точки зрения эффективной разрешимости и «труднорешаемости». На практике ограничиваются нахождением оценочных функций (как правило, верхних) для времени работы конкретных алгоритмов. Для записи таких оценок используется O-символика. Так, под множеством функций $O(f(n))$ понимается совокупность $\{g(n) |\ \exists C > 0 : \ \forall n[g(n) \leq Cf(n)]\}$.

Характер различия между «хорошими» и «плохими» алгоритмами обсуждался в работах Кобхема [27] и Эдмондса [33]. В частности, Эдмондс предложил считать «хорошим» алгоритм полиномиальной трудоемкости (*полиномиальный алгоритм*, т.е. алгоритм трудоемкости $O(poly(l))$, где $poly(l)$ — некоторый полином от длины входных данных задачи). Те алгоритмы, которые не являются полиномиальными, Эдмондс считает «плохими». Более того, в [33] им было выдвинуто предположение о том, что некоторые задачи («плохие» задачи) не могут быть решены полиномиальными алгоритмами. Данная гипотеза остается открытой до сих пор.

Развитие теории сложности вычислений способствовало укоренению именно такого взгляда на разделение алгоритмов по вычислительной сложности. Важное преимущество именно от такого взгляда (и соответственно, разделения всех задач на «хорошие» и «плохие») состоит в независимости от конкретной схемы кодирования. Действительно, было бы трудно представить себе разумную схему кодирования для какой-либо задачи, которая отличалась бы более чем полиномиальным образом от стандартных схем. Аналогичное замечание можно сделать относительно используемой модели вычислений. Например, никакая разумная модель не обладает способностью выполнять параллельно бесконечно большой объем работы за единицу времени.

Итак, общепринятым стандартом эффективной разрешимости задач является наличие полиномиального алгоритма решения. Класс таких задач принято обозначать через $\mathbb{P}$. Идея полиномиальности используется и для доказательства близости (с точки зрения сложностного статуса) двух задач и состоит в конструктивном преобразовании, преобразующем за полиномиальное время индивидуальную задачу первого типа в индивидуальную задачу второго типа. Такое преобразование называется *полиномиальным сведением* и играет огромную роль в теории сложности вычислений.

Фундамент теории «плохих» («труднорешаемых») задач был заложен Куком в работе «Сложность процедур вывода теорем» [29]. Кук рассмотрел класс $\mathbb{NP}$ — класс задач, разрешимых на недетерминированной машине Тьюринга (модели вычислений с неограниченным количеством параллельно выполняемых операций за единицу времени) за полиномиальное время. Все задачи, решаемые за экспоненциальное время, принадлежат классу $\mathbb{NP}$. Кук доказал, что среди задач класса $\mathbb{NP}$ имеются «наиболее сложные» («универсальные») задачи, т.е. задачи, к которым полиномиально сводима любая задача класса $\mathbb{NP}$. Именно, им была рассмотрена задача о выполнимости 3-КНФ (коньюнктивных нормальных форм с не более чем 3 буквами в каждой скобке) и доказана «универсальность» этой задачи. Впоследствии Карпом [37] были найдены примеры других «самых сложных» задач из $\mathbb{NP}$. Такие задачи получили название NP-полных. К настоящему времени известно более чем 3000 примеров NP-полных задач.

Идеи Кука оказались весьма плодотворными. Они позволили свести вопросы о сложности задач в один: «Верно ли, что ни для одной NP-полной задачи нет полиномиальных алгоритмов?». Это один из центральных вопросов современной Theoretical Computer Science, одна из семи проблем тысячелетия [45]. Для ответа на данный вопрос необходимо совершить крупное научное открытие.

Вопросы и задачи

1. Какие из следующих задач являются массовыми:
   - Доказать, что для любого натурального n справедливо неравенство $2^{n+1} \geq n+1$
   - Верно ли, что 2$>$1
2. Какие из приведенных высказываний верны:
   - $4n \in O(n^2)$
   - $2^{log_3(n)} \in O(n)$
   - $4n^2 \in O(5n^2)$
   - $2^n \in O(n!)$
   - $(1+\frac{1}{n})^n \in O(1)$
   - $n! \in O((\frac{n}{3})^n)$
3. Верно ли, что если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$, то:
   - $\mathbb{P} \subset \mathbb{NP}$
   - $\mathbb{P} \neq \mathbb{NPC}$
   - $\mathbb{NPC} \cup \mathbb{P} \subseteq \mathbb{NP}$
   - $\mathbb{P} \subset \mathbb{NPC}$

Глава 2

Наследственные классы графов и проблема демаркации

Рассмотрев какую-нибудь задачу на графах и некоторое семейство классов графов можно попытаться отделить множества графов, для которых имеет место полиномиальная разрешимость, от случаев NP-полноты. Однако, для выполнения данной демаркации нужно иметь в виду несколько обстоятельств. Во-первых, необходимо рассматривать только достаточно представительные семейства классов графов. Действительно, если имеется конечное множество классов графов, то разграничение очевидно — можно только изучить сложностной статус задачи для каждого из этих классов. Во-вторых, необходимо иметь четкую формализацию границы, например, в виде играющих особую роль «критических» классов графов. Здесь надо быть особенно осторожным, поскольку «физически» элементов данной границы может и не оказаться. Так, например, можно рассматривать все множество классов графов и изучать минимальные по включению классы, для которых данная задача является NP-полной (или максимальные по включению классы, для которых эта задача оказывается полиномиально разрешимой). На самом деле, ни тех, ни этих классов не существует. Действительно, из любого класса можно удалить произвольный граф и к любому классу можно добавить произвольный граф. Сложностной статус задачи в этом новом классе будет таким же, как и в старом.

Итак, проблему демаркации имеет смысл рассматривать тогда, когда она содержательна и корректно поставлена. Соответствующими свойствами должен обладать и объект исследований — семейство классов графов. Настоящая работа нацелена на изложение результатов исследования указанной границы, где в качестве объекта выступает семейство наследственных классов графов.

Дадим определение наследственного класса графов. Все основные понятия теории графов, которые в этой и последующих главах не приводятся, можно найти, например, в [8, 9, 19, 25, 32]. Класс графов $\mathbf{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathbf{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathbf{S}$. При этом принята запись $\mathbf{X} = Free(\mathbf{S})$. Для наследственного класса $\mathbf{X}$ через $Forb(\mathbf{X})$ обозначается минимальное множество запрещенных порожденных подграфов. Для любого наследственного класса это множество определяется единственным образом. Если $Forb(\mathbf{X})$ конечно, то класс $\mathbf{X}$ называется *конечно определенным.*

Рассмотрим несколько классических примеров наследственных классов графов:

- **Planar** — класс планарных графов. Теорема Понтрягина-Куратовского, полностью характеризующая множество $Forb(\mathbf{Planar})$ как класс графов, гомеоморфных графам K_5 и $K_{3,3}$, является примером описания через запрещенные подграфы класса графов, изначально определенного иначе.

- **Bipartite** — класс двудольных графов. Теорема Кенига полностью описывает множество $Forb(\mathbf{Bipartite})$, как множество всех простых циклов нечетной длины.

- **Perfect** — класс *совершенных* графов, т.е. класс графов, в которых для каждого порожденного подграфа G найдутся такие порожденные подграфы K_s и $\overline{K_t}$ подграфа G, что $st \geq |V(G)|$. Это пример наследственного класса графов, для которого задача нахождения минимального множества запрещенных порожденных подграфов оказалась трудной. Данная задача была недавно решена и было показано, что $Forb(\mathbf{Perfect})$ совпадает с множеством $\{C_{2k+1}, \overline{C_{2k+1}}, k > 1\}$ [26].

- **TO** — класс транзитивно ориентируемых графов. Граф называется *транзитивно ориентируемым*, если после ориентирования ребер он становится изоморфным графу некоторого транзитивного отношения. Класс **TO** является собственным подклассом класса совершенных графов. Но, в отличие от класса **Perfect**, задача определения множества $Forb(\mathbf{TO})$ оказалась более простой. Это бесконечное множество было полностью описано в [34].

- $\mathbf{Deg}(d)$ — класс всех графов, степени вершин которых не превосходят d. Ясно, что для любого d множество $Forb(\mathbf{Deg}(d))$ содержится в множестве графов, у которых число вершин не превосходит $d+2$ и хотя бы одна вершина имеет степень, равную $d+1$. Таким образом, для любого d множество $Forb(\mathbf{Deg}(d))$ конечно.

- **Line** — класс всех реберных графов. Минимальное множество запрещенных порожденных подграфов для этого класса известно — оно полностью описывается при доказательстве теоремы 8.4 монографии [19] и состоит в точности из 9 графов.

О сложности изучения наследственных классов графов свидетельствует не только продолжительность полного описания множества $Forb(\mathbf{Perfect})$ (это заняло более чем 40 лет), но и то обстоятельство, что один из старейших и престижнейших журналов в области дискретной математики опубликовал две работы противоположного содержания по таким классам. Так, Journal of Combinatorial Theory в 1969 году опубликовал статью «Интервальные графы являются транзитивно ориентируемыми», а в 1970 году там была опубликована статья «Интервальные графы не являются транзитивно ориентируемыми».

Вернемся к формализациям в задаче демаркации для семейства наследственных классов графов. Пусть Π — какая-нибудь задача на графах. Наследственный класс графов будем называть Π-простым, если задача Π

для графов из этого класса полиномиально разрешима, и П-сложным в противном случае. Заметим, что «естественное» определение П-сложного класса, как наследственного класса с NP-полной задачей П, не совсем удачно. Действительно, если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$, то существуют задачи, не являющиеся ни NP-полными, ни полиномиально разрешимыми [39]. Далее, мы тоже будем придерживаться справедливости этой гипотезы. В идеале можно надеяться на исчерпывающую характеризацию П-простых и П-сложных классов графов. Рассматриваемым здесь инструментом достижения этой цели будет метод поиска «критического» класса графов, т.е. наследственного класса, играющего особую роль при решении задачи демаркации. Этот метод будет применяться в задаче о независимом множестве, в задаче о k-раскраске и ее обобщениях.

Вопросы и задачи

1. Какие из следующих классов являются наследственными:
   - Множество графов, степени вершин которых не более чем 3 и любые две вершины степени 3 находятся на расстоянии не менее чем 2
   - Множество всех графов без графа K_4
   - Множество графов, у которых имеется не более чем 3 треугольника
   - Множество графов, все порожденные циклы которых имеют длину не менее чем 2011
   - Множество графов, все циклы которых имеют длину не более чем 2011
2. Найти минимальные по включению множества запрещенных порожденных подграфов для тех классов из предыдущей задачи, которые оказались наследственными.
3. Верно ли, что для произвольной задачи на графах П любой наследственный класс является либо П-простым, либо П-сложным?

Глава 3

Минимальные сложные классы графов

3.1 Вопросы существования минимальных сложных элементов решетки наследственных классов графов

Естественными «критическими» классами графов являются максимальные (по включению) П-простые классы и минимальные (по включению) П-сложные классы. Можно показать, повторяя почти дословно рассуждения из работы [20], что максимальных простых классов нет ни для одной задачи П. Однако, до недавнего времени никакой информации о минимальных сложных классах не было. Первые результаты о структуре таких классов были получены автором этих строк. Так, в 2009 году ему удалось решить вопрос существования минимальных сложных классов для ряда задач на графах.

Данная глава пособия посвящена изучению минимальных П-сложных классов. Именно, в первой части этой главы доказывается, что задача распознавания принадлежности любому наследственному классу графов является такой задачей. Установление минимальности определенных классов графов для некоторых модификаций классических задач о k-раскраске составляет содержание второй части настоящей главы. Речь идет о задаче о вершинном списковом ранжировании (далее, просто задаче ВСР), сформулированной в работе [36]. Постановка задачи ВСР состоит в следующем: задан граф G и список $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(v_1), \mathcal{L}(v_2), \ldots, \mathcal{L}(v_n)\}$ $(V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$. Множество $\mathcal{L}(v_i)$ (называемое *палитрой цветов вершин графа* G) является конечным множеством номеров разрешенных цветов для вершины v_i. Всюду далее номер цвета будет отождествляться с самим цветом, поэтому на множестве цветов из $\mathcal{L}$ естественным образом индуцируется отношение «быть больше». *$\mathcal{L}$-ранжированием графа G* называется такое отображение $c : V(G) \to \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}(v_i)$, что выполняются следующие два условия:

(1). Для любой вершины x число $c(x)$ принадлежит множеству $\mathcal{L}(x)$.

(2). Каждый путь, соединяющий две одноцветные вершины u и v, содержит такую вершину w, что $c(w) > c(u)$.

Покажем на примере процесс решения задачи о вершинном списковом ранжировании. Пусть G — граф, изображенный на рисунке 3, а $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(v_1) = \{3\}, \mathcal{L}(v_2) = \{5\}, \mathcal{L}(v_3) = \{3,5\}, \mathcal{L}(v_4) = \{1,4\}, \mathcal{L}(v_5) = \{1,4\}\}$, v_5 — вершина степени 5.

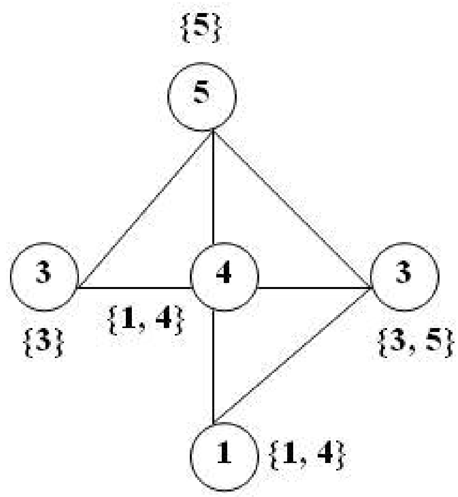

Рис. 3.1: Постановка и решение задачи о вершинном списковом ранжировании

Понятно, что $c(v_1) = 3, c(v_2) = 5$. Из второго требования к $\mathcal{L}$-ранжированию следует, что $c(v_3) = 3$. Из этого же требования следует, что вершину v_5 нельзя покрасить в цвет 1. Поэтому $c(v_5) = 4$, отсюда $c(v_1) = 1$. Таким образом, для заданных графа G и назначения $\mathcal{L}$ существует $\mathcal{L}$-ранжирование.

Задача о вершинном списковом ранжировании для данного графа G и палитры цветов вершин $\mathcal{L}$ состоит в том, чтобы определить, имеет ли граф $\mathcal{L}$-ранжирование. Данная задача имеет приложения к параллельной реализации разложения Холесского [40], к выполнению параллельных запросов к базе данных [31], к верификации компьютерных программ [44]. Уточним, что под ВСР-простым классом понимается такой наследственный класс, для которого имеется полиномиальный алгоритм распознавания существования $\mathcal{L}$-ранжирования при любой палитре $\mathcal{L}$.

3.2 О несуществовании минимальных сложных классов для некоторых задач теории графов

Обозначим через РП[$\mathbf{X}$] задачу распознавания принадлежности классу графов $\mathbf{X}$.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{X}$ *— наследственный класс графов, то любой* РП[$\mathbf{X}$]-*сложный класс не является минимальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда некоторый класс графов $\mathbf{Y}$ является минимальным РП[$\mathbf{X}$]-сложным. Ясно, что этот класс содержит граф G, не принадлежащий классу $\mathbf{X}$ (в противном случае класс $\mathbf{Y}$ был бы РП[$\mathbf{X}$]-простым). Пусть $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \setminus (\mathbf{Y} \cap Free(\{G\}))$. Понятно, что класс $\mathbf{Z}$ состоит из графов, в каждом из которых граф G является порожденным. Т.к. класс графов $\mathbf{X}$ является наследственным и граф G не принадлежит этому классу, то любой граф из $\mathbf{Z}$ не принадлежит классу $\mathbf{X}$. Поэтому класс $\mathbf{Z}$ является классом с полиномиально разрешимой задачей РП[$\mathbf{X}$]. Отсюда следует, что задача РП[$\mathbf{X}$] в классе графов $\mathbf{Y} \setminus \mathbf{Z} = \mathbf{Y} \cap Free(\{G\})$ не является полиномиально разрешимой. Получаем противоречие с предположением. Таким образом, любой РП[$\mathbf{X}$]-сложный класс не является минимальным. Теорема доказана.

Конкретным примером задачи на графах, к которой не применима теорема 1, является задача о вершинной k-раскраске, NP-полная при любом $k > 2$.

3.3 Вычислительная сложность задач о списковом ранжировании в некоторых классах графов

В этом и следующем разделах рассматриваются несколько классов графов, один из которых является *наследственным замыканием* (т.е. совокупностью всевозможных порожденных подграфов) множеств графов специального вида — комет. *Кометой* $Comet(i, j)$ $(i \geq 1,\ j \geq 1)$ называется граф, получаемый отождествлением вершины степени $i+1$ графа $K_{1,i+1}$ с одной из концевых вершин пути P_j. Комета изображена на рисунке 3.2.

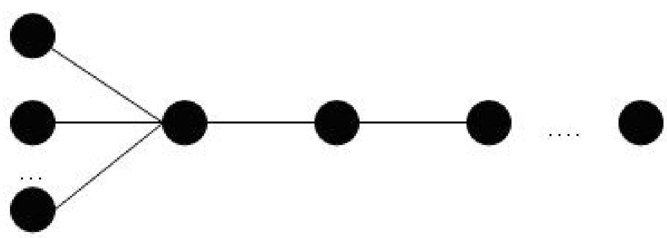

Рис. 3.2: Комета

Класс **Comet** — наследственное замыкание, множества комет. Пусть $\mathbf{Comet}^{(1)}(k)$ — наследственное замыкание множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Comet(i,1), Comet(i,2), \ldots, Comet(i,k)\}$, а $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ — множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Comet(1,i), Comet(2,i), \ldots, Comet(k,i)\}$.

Лемма 1[30]. *В классе простых путей* **Path** *задача* ВСР *полиномиально разрешима.*

Лемма 2[30]. *Для любого фиксированного* k *множество лесов, имеющих не более чем* k *нелистовых вершин, является* ВСР*-простым классом.*

Лемма 3. *Задача* ВСР *в классе простых циклов* **Cycle** *полиномиально разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — произвольный связный граф и x — наибольший из цветов палитры $\mathcal{L}$. Ясно, что в любом $\mathcal{L}$-ранжировании имеется не более одной вершины с цветом x. Понятно также, что если $\mathcal{L}$-ранжирование существует, то существует такое $\mathcal{L}$-ранжирование, в котором одна из вершин имеет цвет x.

Пусть $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и v — такая вершина графа G, что $x \in \mathcal{L}(v)$. Понятно, что если существует $\mathcal{L}$-ранжирование графа G, в котором $c(v) = x$, тогда существует и $\mathcal{L}'$-ранжирование графа G', где G' — граф, порожденный множеством вершин $V(G) \setminus \{v\}$ и $\mathcal{L}' = \{\mathcal{L}(v_1) \setminus \{x\}, \mathcal{L}(v_2) \setminus \{x\}, \ldots, \mathcal{L}(v_n) \setminus \{x\}\} \setminus \{\mathcal{L}(v) \setminus \{x\}\}$. Очевидно, что обратное утверждение также является верным. Таким образом, задача BCP для графа G полиномиально сводится к той же задаче для графов из множества $\{G' : G'$ получается из G удалением такой вершины v, что $x \in \mathcal{L}(v)\}$. Отсюда следует, что задача BCP для класса **Cycle** полиномиально сводима к той же задаче для класса **Path**. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого фиксированного k класс* $\mathbf{Comet}^{(1)}(k)$ *является* BCP-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для любого наследственного класса графов $\mathbf{X}$ задача BCP полиномиально сводима к связным графам из $\mathbf{X}$. Очевидно, что любой связный граф $G \in \mathbf{Comet}^{(1)}(k)$ содержит не более чем k нелистовых вершин. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость леммы 4. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для любого фиксированного k класс* $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ *является* BCP-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при любом фиксированном k задача BCP в классе $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ полиномиально сводима к той же задаче в классе простых путей. Понятно, что любая компонента связности произвольного графа из $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ является либо кометой, либо простым путем. Таким образом, можно рассматривать только кометы, принадлежащие классу $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$. Пусть G — любой граф такого вида, а $\mathcal{L}$ — палитра цветов вершин графа G.

Рассмотрим множество $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ — множество вершин графа G степени 1, которые смежны с его вершиной v степени $s+1$. Через M обозначим декартово произведение $\mathcal{L}(v_1) \times \mathcal{L}(v_2) \times \ldots \times \mathcal{L}(v_s) \times \mathcal{L}(v)$. Для любого такого набора $(x_1, x_2, \ldots, x_s, x) \in M$, что $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ и x больше любых двух равных элементов из того же множества, рассмотрим частичную допустимую раскраску графа G, в которой $c(v_1) = x_1, c(v_2) = x_2, \ldots, c(v_s) = x_s, c(v) = x$. Рассмотрим максимальное по включению подмножество множества $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, в котором любые две вершины имеют различные цвета. Будем считать, что это подмножество образовано вершинами $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_p}$, причем $x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_p}$. Построим палитру цветов вершин $\mathcal{L}'$ простого пути $P = (u_1, u_2, \ldots, u_{|V(G)|+p-s})$. Для любого $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ множество $\mathcal{L}'(u_j)$ равно $\{x_{i_j}\}$, $\mathcal{L}'(u_{p+1}) = \{x\}$ и для любого $|V(G)| + p - s \geq j \geq p+2$ множество $\mathcal{L}'(u_j)$ совпадает с $\mathcal{L}(w_j)$, где вершина $w_j \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_s, v\}$ в графе G отстоит на расстоянии $j - p - 1$ от центральной вершины v. Легко проверить, что любое расширение рассматриваемой частичной раскраски до некоторого $\mathcal{L}$-ранжирования графа G индуцирует некоторое $\mathcal{L}'$-ранжирование пути P и наоборот. Поскольку $s \leq k$ и k является фиксированным, то мощность множества M ограничена некоторым полиномом от входных данных задачи ВСР. Таким образом, для любого фиксированного k задача ВСР в классе $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ полиномиально сводима к той же задаче в классе простых путей.

Из проведенных рассуждений и из леммы 1 следует, что при любом заданном k класс $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ является ВСР-простым и РСР-простым. Лемма 5 доказана.

Звездой S_i назовем граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$. Звезда изображена на рисунке 3.3.

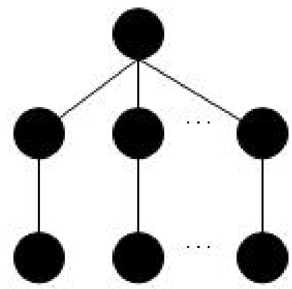

Рис. 3.3: Звезда

Пусть **Star** — наследственное замыкание множества звезд.

Лемма 6. *Класс* **Star** *является* ВСР-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на сведении задачи о вершинном списковом ранжировании в классе деревьев высоты не более чем два (обозначаемом далее **THTree**) к той же задаче в классе **Star**. Пусть $G \in$ **THTree**. Корень дерева G будем обозначать через r, его нелистовых потомков обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ под множеством $\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{j_i}^{(i)}\}$ будем понимать множество потомков вершины x_i. В работе [30] доказано, что класс **THTree** является сложным для задачи о вершинном списковом ранжировании даже для палитр цветов вершин специального вида (называемых далее *упрощенными*). Это такие палитры $\mathcal{L}$, у которых множества $\mathcal{L}(r)$, $\mathcal{L}(y_1^{(1)}), \ldots, \mathcal{L}(y_{j_1}^{(1)}), \mathcal{L}(y_1^{(2)}), \ldots, \mathcal{L}(y_{j_2}^{(2)}), \ldots, \mathcal{L}(y_1^{(p)}), \ldots, \mathcal{L}(y_{j_p}^{(p)})$ имеют мощность один и для которых $\mathcal{L}(x_1) = \{\alpha_1, \beta_1\}, \mathcal{L}(x_2) = \{\alpha_2, \beta_2\}, \ldots, \mathcal{L}(x_p) = \{\alpha_p, \beta_p\}$. Данные палитры также обладают тем свойством, что $\mathcal{L}(r)$ — наименьший среди цветов из $\mathcal{L}$ и тем свойством, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ и любого $j \in \{1, 2, \ldots, j_i\}$ цвет из $\mathcal{L}(y_j^{(i)})$ больше α_i и меньше β_i.

Рассмотрим сужение задачи ВСР в классе **THTree** на палитры описанного выше вида. Пусть $G \in$ **THTree** и пусть $\mathcal{L}$ — упрощенная палитра цветов вершин этого графа. Можно считать, что разность любых двух различных цветов из $\mathcal{L}$ не меньше чем 2 (это предположение не уменьшает общности, поскольку в противном случае можно умножить каждый из цветов палитры на 2). Рассмотрим вершину x_1 графа G. Множество потомков x_1 произвольным образом разделим на два множества A, B, мощности которых отличаются не более чем на 1. Построим по графу G и палитре $\mathcal{L}$ граф $G^{'}$ и палитру $\mathcal{L}^{'}$ следующим образом. Удалим из G вершину x_1 и добавим вершины $x_1^{'}, x_1^{''}, x_1^{'''}$. Добавим также ребра $(r, x_1^{'}), (r, x_1^{''}), (r, x_1^{'''})$, ребра, инцидентные $x_1^{'}$ и всевозможным вершинам из A, а также ребра, инцидентные $x_2^{''}$ и всевозможным вершинам из B. Для любой вершины $x \in V(G) \cap V(G^{'})$ выполняется равенство $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}^{'}(x)$. Пусть $\alpha = \alpha_1 + 1$ и $\beta = \beta_1 - 1$. Положим $\mathcal{L}^{'}(x_1^{'}) = \{\alpha_1, \beta\}, \mathcal{L}^{'}(x_1^{''}) = \{\alpha, \beta_1\}, \mathcal{L}^{'}(x_1^{'''}) = \{\alpha, \beta\}$. Покажем, что $\mathcal{L}$-ранжирование графа G существует тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{L}^{'}$-ранжирование графа $G^{'}$.

Предположим, что существует $\mathcal{L}^{'}$-ранжирование графа $G^{'}$. Возможны только следующие три случая:

1.1. $\mathcal{L}^{'}$-ранжирование таково, что $c(x_1^{'}) = \alpha_1, c(x_1^{''}) = \beta_1, c(x_1^{'''}) \in \{\alpha, \beta\}$. Окрасим вершину x_1 в цвет β_1, а цвет остальных вершин из $V(G) \setminus \{x_1\}$ совпадает с их цветом в $\mathcal{L}^{'}$-ранжировании. Легко проверить, что построенное таким образом отображение является $\mathcal{L}$-ранжированием графа G.

1.2. $\mathcal{L}^{'}$-ранжирование таково, что $c(x_1^{'}) = \alpha_1, c(x_1^{''}) = \alpha, c(x_1^{'''}) = \beta$. Окрасим вершину x_1 в цвет α_1, а цвет остальных вершин из $V(G) \setminus \{x_1\}$ совпадает с их цветом в $\mathcal{L}^{'}$-ранжировании. Легко проверить, что построенное таким образом отображение является $\mathcal{L}$-ранжированием графа G.

1.3. $\mathcal{L}^{'}$-ранжирование таково, что $c(x_1^{'}) = \beta, c(x_1^{''}) = \beta_1, c(x_1^{'''}) = \alpha$. Этот случай симметричен предыдущему.

Предположим, что существует $\mathcal{L}$-ранжирование графа G. Возможны только два случая:

2.1. $\mathcal{L}$-ранжирование таково, что $c(x_1) = \alpha_1$. Построение $\mathcal{L}^{'}$-ранжирования графа $G^{'}$ выполняется обратным образом к случаю 1.2.

2.2. $\mathcal{L}$-ранжирование таково, что $c(x_1) = \beta_1$. Построение $\mathcal{L}'$-ранжирования графа G' выполняется обратным образом к случаю 1.3.

Итак, $\mathcal{L}$-ранжирование графа G существует тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{L}'$-ранжирование графа G', при этом палитра $\mathcal{L}'$ остается упрощенной. Применяя описанную выше дихотомию достаточное число раз, мы получаем граф $G^* \in$ **Star**. Ясно, что вопрос о существовании ранжирования графа G^* эквивалентен вопросу о существовании $\mathcal{L}$-ранжирования графа G. Заметим, что входные данные задачи ВСР для графа G^* ограничены сверху полиномом от входных данных той же задачи для графа G. Отсюда следует, что задача ВСР в классе **THTree** полиномиально сводима к той же задаче в классе **Star**. Лемма 6 доказана.

3.4 Минимальные сложные классы графов для задач о списковом ранжировании

Далее будет доказано, что для рассматриваемых задач классы **Comet** и **Star** являются минимальными сложными классами, причем множество $Forb$(**Comet**) бесконечно, а множество $Forb$(**Star**) конечно.

Мостом B_k называется граф, получаемый соединением вершин степени 2 двух копий графа P_3 простым путем длины k. Мост B_k изображен на рисунке 3.4.

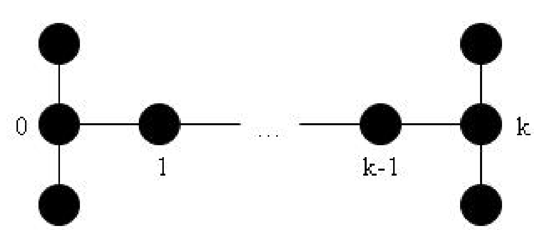

Рис. 3.4: Мост B_k

Триодом $T_{i,j,k}$ называется дерево, имеющее одну вершину степени 3 и ровно три листа, находящихся от вершины степени 3 на расстояниях i, j, k соответственно. Триод изображен на рисунке 3.5.

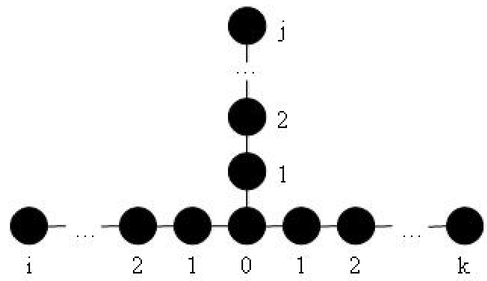

Рис. 3.5: Триод $T_{i,j,k}$

3.4.1 Наследственные замыкания комет и звезд

Лемма 7. *Имеет место равенство* $Forb(\mathbf{Comet}) = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, T_{1,2,2}, C_3, C_4, \ldots\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждый из графов множества $\mathbf{M}_1 = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, T_{1,2,2}, C_3, C_4, \ldots\}$ не принадлежит классу **Comet**, а каждый порожденный подграф любого из графов этого множества принадлежит **Comet**, то $Forb(\mathbf{Comet}) \supseteq \mathbf{M}_1$. Докажем, что $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Comet}$. Пусть $G \in Free(\mathbf{M}_1)$. Очевидно, что этот граф является лесом. Поскольку $G \in Free(\{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}\})$, то в данном графе имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Если $G \in \mathbf{Deg}(2)$, то $G \in \mathbf{Comet}$. Т.к. $G \in Free(\{T_{1,2,2}\})$, то и в случае, когда $G \notin \mathbf{Deg}(2)$, граф G принадлежит классу **Comet**. Таким образом, справедливо включение $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Comet}$. Из полученных включений заключаем, что $Forb(\mathbf{Comet}) = \mathbf{M}_1$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Имеет место равенство* $Forb(\mathbf{Star}) = \{C_3, C_4, C_5, C_6, P_3 \oplus P_2, B_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathbf{M}_1 = \{C_3, C_4, C_5, C_6, P_3 \oplus P_2, B_1\} \subseteq Forb(\mathbf{Star})$. Докажем, что $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Star}$, откуда будет следовать утверждение леммы.

Покажем, что $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Star}$. Пусть $G \in Free(\mathbf{M}_1)$. Очевидно, что граф G является лесом. Если он является связным, то имеет диаметр не более чем 5 (поскольку $G \in Free(\{P_3 \oplus P_2\})$) и имеет не более одной вершины, степень которой больше чем 2 (поскольку $G \in Free(\{P_3 \oplus P_2, B_1\})$). Понятно, что если такая вершина существует, то расстояние от нее до любой другой вершины не превосходит 2. Отсюда следует, что $G \in \mathbf{Star}$. Ясно, что если G несвязен, то либо $G = k_1 P_2 \oplus k_2 P_1$ для некоторых k_1 и k_2, либо каждая компонента связности графа G, кроме одной, состоит из одной вершины. Из доказанного ранее следует, что эта компонента-исключение принадлежит классу $\mathbf{Star}$, откуда легко следует, что $G \in \mathbf{Star}$. Таким образом, $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Star}$. Лемма 8 доказана.

3.4.2 Доказательства минимальности

Теорема 1. *Класс* **Comet** *является минимальным* BCP-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс **Comet** является BCP-сложным [30]. Докажем его минимальность.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathbf{Comet}$. Понятно, что данный граф является порожденным подграфом некоторой кометы $Comet(i,j)$ при некоторых i,j. Пусть $\mathbf{M}_1 = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, T_{1,2,2}, C_3, C_4, C_5\} \subset Forb(\mathbf{Comet})$. Очевидно, что имеет место включение $Free(\mathbf{M}_1 \cup \{G\}) \subseteq Free(\mathbf{M}_1 \cup \{Comet(i,j)\})$. Легко проверить, что любая компонента связности произвольного графа из класса $Free(\mathbf{M}_1 \cup \{Comet(i,j)\})$ является либо простым путем, либо простым циклом, либо кометой. Отсюда и из лемм 1, 3, 4, 5 следует, что класс $Free(\mathbf{M}_1 \cup \{G\})$ является как BCP-простым. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Класс* **Star** *является минимальным* BCP-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 6 означает, что класс **Star** является ВСР-сложным. Докажем его минимальность. Граф G является порожденным подграфом звезды S_i для некоторого i. Поэтому справедливо включение $\mathbf{Star} \cap Free(\{G\}) \subseteq \mathbf{Star} \cap Free(\{S_i\})$. Очевидно, что произвольная компонента связности любого графа из $\mathbf{Star} \cap Free(\{S_i\})$ имеет не более чем i нелистовых вершин. Отсюда и из леммы 2 следует, что для любого $G \in \mathbf{Star}$ задача ВСР в классе графов $\mathbf{Star} \cap Free(\{G\})$ полиномиально разрешима. Теорема 2 доказана.

Вопросы и задачи

1. Доказать, что для любой задачи на графах Π количество Π-простых классов бесконечно.

2. Доказать, что если для задачи Π имеется хотя бы два Π-сложных класса, то количество таких классов бесконечно.

3. Содержит ли представленный граф $\mathcal{L}$-ранжирование (назначение допустимых цветов вершинам одинаково — $\{2, 3, 4, 5\}$)?

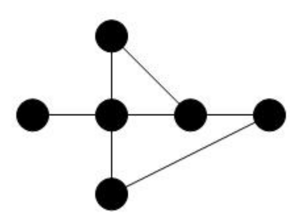

Рис. 3.6: Граф задачи

4. Доказать, что следующие два класса графов являются сложными для задачи о списковом ранжировании:

   - множество лесов со степенями вершин не более чем 3, каждая компонента которых имеет простой путь, содержащий все нелистовые вершины компоненты
   - множество графов, являющихся реберными к графам из предыдущего пункта

Глава 4

НМ-граничные классы относительно класса планарных графов

4.1 П-граничные классы графов и их связь с минимальными П-сложными

В предыдущей главе было показано, что для некоторых задач на графах нет минимальных П-сложных классов графов. Таким образом, многие задачи на графах имеют бесконечные монотонно убывающие цепочки из сложных классов графов. Тем самым имеет смысл рассмотреть пределы таких цепочек, а особенно минимальные по включению из таких пределов. Данная идея принадлежит В.Е. Алексееву, который ввел понятие граничного класса графов [20].

Класс графов $\mathbf{X}$ называется П-*предельным*, если существует такая последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ из П-сложных классов графов, что $\mathbf{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i$. Минимальный по включению П-сложный класс называется П-*граничным*.

Связь между граничными и предельными классами показана на рисунке 4.1. Линиями стандартной толщины выделена последовательность, сходящаяся к предельному классу $\mathbf{Y}$. Жирным указана последовательность, сходящаяся к граничному классу $\mathbf{X}$.

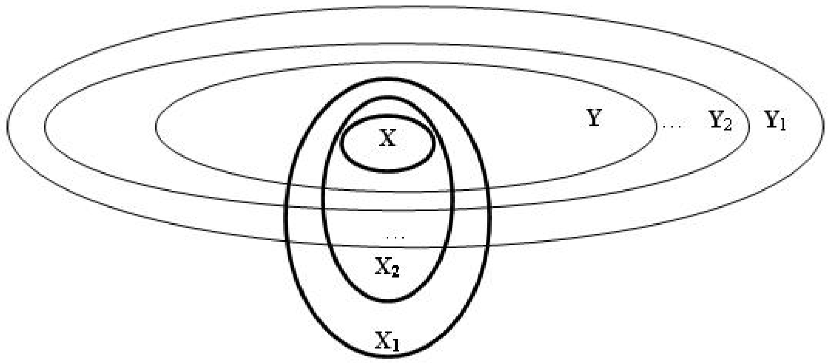

Рис. 4.1: Граничный и предельный классы

Значение понятие граничного класса графов раскрывает следующая теорема, доказанная в работе [20] В.Е. Алексеевым.

Теорема 3. *Конечно определенный класс графов является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда в нем содержится какой-нибудь* Π-*граничный класс.*

Из теоремы 3 следует, что знание всех граничных классов для данной задачи позволяет полностью провести анализ сложности в семействе конечно определенных классов графов. И хотя доказательство этой теоремы не является конструктивным (оно явно не формулирует соответствующий полиномиальный алгоритм), проблема выявления граничных классов приобретает особый интерес.

Итак, понятие граничного класса является релаксацией понятия минимального сложного. Однако, уже в вопросе существования между такими классами обнаруживается принципиальное различие. Как уже отмечалось, ни для каждой NP-полной задачи на графах есть минимальные сложные классы. Это оказывается неверным при переходе к граничным классам, поскольку любой Π-сложный класс графов содержит некоторый Π-граничный [20]. Однако и имеется связь между двумя данными понятиями. Она обнаруживается в следующих двух теоремах.

Теорема 4. *Если некоторый класс графов является* Π*-сложным граничным классом, то этот класс является минимальным* Π*-сложным классом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{X}$ — Π-сложный граничный класс графов, который не является минимальным Π-сложным. Тогда существует такой Π-сложный класс графов $\mathbf{Y}$, что $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$. Класс $\mathbf{Y}$ является Π-предельным классом. Получаем противоречие с тем, что $\mathbf{X}$ — Π-граничный класс. Теорема 4 доказана.

Автору неизвестно, верно ли обратное к теореме 4 утверждение (т.е. до сих пор неизвестно, существуют ли минимальные сложные классы, отличные от граничных). Однако, как показывает следующий результат, для конечно определенных классов графов такие критерии действительно имеют место.

Теорема 5. *Конечно определенный класс является* Π*-граничным тогда и только тогда, когда он является минимальным* Π*-сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{X}$ — конечно определенный класс графов, являющийся Π-граничным. Из теоремы 3 следует, что $\mathbf{X}$ является Π-сложным. Из теоремы 4 следует, что $\mathbf{X}$ является минимальным Π-сложным классом.

Пусть теперь $\mathbf{X}$ — конечно определенный класс, являющийся минимальным Π-сложным. Существует Π-граничный класс $\mathbf{Y}$, содержащийся в $\mathbf{X}$. Предположим, что $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, тогда существует граф $G \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$. Из той же теоремы 3 следует, что класс $\mathbf{X} \cap Free(\{G\})$ является Π-сложным. Получаем противоречие с минимальностью класса $\mathbf{X}$. Таким образом, предположение неверно, т.е. $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. Теорема доказана.

В той же работе рассматривалась задача о независимом множестве и был найден граничный класс для этой задачи. Речь идёт о классе — классе графов, у которых каждая компонента связности является либо триодом, либо простым путем. Покажем на примере, каким образом теорема 3 и граничность класса $\mathbf{T}$ может быть применена при анализе сложности. Пусть G — произвольный граф, не принадлежащий классу $\mathbf{T}$. Рассмотрим класс $Free(\{G\})$. Ясно, что он является конечно определенным и содержит класс $\mathbf{T}$, поэтому задача о независимом множестве для графов из этого класса не является полиномиально разрешимой. Можно рассмотреть другой пример — класс лесов **Forest**. Этот класс является простым для задачи о независимом множестве и содержит класс $\mathbf{T}$. Заметим, что при этом нет никакого противоречия с утверждением теоремы 3. Дело в том, что **Forest** не является конечно определенным классом, поэтому к нему данное утверждение неприменимо (и, следовательно, теорема 3 не применима таким классам).

В работе [22] понятие граничного класса рассматривалось применительно к задаче о доминирующем множестве), где для этой задачи было найдено три граничных класса. Это классы $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$, причем $\mathbf{D}$ и $\mathbf{Q}$ получаются трансформациями класса $\mathbf{T}$. Класс $\mathbf{D}$ состоит из графов, являющихся реберными к графам класса $\mathbf{T}$. Класс $\mathbf{Q}$ совпадает с множеством порожденных подграфов для графов из $\{G = (V(G) = V(H) \cup E(H), E(G)) : H \in \mathbf{T}, E(G) = \{(x, y) : x, y \in V(H), x \neq y\} \cup \{(x, e) : x \in V(H), e \in E(H)\}\}$. В работах [5, 12, 14] автором этих строк был разработан аппарат доказательства граничности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$, действенность полученных методов подтверждается большим числом приведенных конкретных фактов установления граничности этих классов. Интересующемуся читателю рекомендуется прочитать статью [14], где было построено континуальное семейство задач на графах, для каждой из которых классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ являются граничными одновременно.

Вместе с тем, ни для одной задачи на графах до сих пор не получено полного описания множества граничных классов графов. Имеются лишь гипотезы о структуре таких классов для ряда задач и определенные продвижения на пути к их доказательству. Одно из таких предположений излагается в следующем разделе.

4.2 Гипотеза В. Е. Алексеева и ее варианты

Напомним, что независимым множеством в обыкновенном графе называется множество попарно несмежных вершин. Задача о независимом множестве состоит в нахождении в данном графе наибольшего независимого множества. Далее задачу о независимом множестве будем называть задачей НМ.

Возможно, что класс $\mathbf{T}$ является единственным НМ-граничным. Доказательство этого предположения В.Е. Алексеева эквивалентно доказательству того факта, что для любого $G \in \mathbf{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым [20]. О трудности проблемы говорит тот факт, что в настоящее время неизвестен сложностной статус задачи о независимом множестве для классов $Free(\{P_5\})$ и $Free(\{T_{1,2,2}\})$. Однако, НМ-простота классов графов $Free(\{P_4\})$ [28] и $Free(\{T_{1,1,2}\})$ [2] дает некоторую надежду на то, что гипотеза В.Е. Алексеева справедлива.

В то же время, если рассматривать какое-либо собственное подсемейство семейства наследственных классов графов, то можно надеяться на исчерпывающее решение проблемы. Так, в [20] доказано, что среди так называемых *сильно наследственных классов графов* (наследственных классов, замкнутых еще и относительно удаления ребер) класс $\mathbf{T}$ является единственным НМ-граничным.

При сужениях тех или иных задач на графах естественным образом возникает понятие относительного граничного класса, обобщающее понятие просто граничного класса. Пусть $\mathbf{Y}$ — какой-нибудь П-сложный класс. Наследственный класс графов $\mathbf{X}$ назовем П-*граничным относительно класса* $\mathbf{Y}$, если существует такая последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ П-сложных подклассов класса $\mathbf{Y}$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i = \mathbf{X}$. Минимальный П-предельный относительно $\mathbf{Y}$ класс назовем П-*граничным относительно* $\mathbf{Y}$ *классом*. Класс $\mathbf{X}$ называется *конечно определенным относительно* $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \cap Free(\mathbf{M})$, где $\mathbf{M}$ — некоторое конечное множество графов. Для относительных граничных классов справедлив аналог теоремы 3, который может быть доказан почти также.

Класс $\mathbf{T}$ является НМ-граничным классом относительно класса планарных графов **Planar**. Доказательство этого факта почти дословно повторяет соответствующее доказательство из [20]. Предположение В. Е. Алексеева может быть перенесено на случай НМ-граничных классов относительно **Planar**.

Рассмотрение именно класса планарных графов подсказано результатами работы [41]. В этой работе исследовались граничные классы для задачи о доминирующем множестве (задачи ДМ) относительно такого класса графов. Там же было показано, что это множество исчерпывается классами $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$. Это означает, что класс $\mathbf{Planar} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ является ДМ-простым тогда и только тогда, когда существуют такие i и j, что $G_i \in \mathbf{T}$ и $G_j \in \mathbf{D}$. Однако, множество ДМ-граничных классов графов не совпадает с множеством $\{\mathbf{T}, \mathbf{D}\}$, поскольку имеется ДМ-граничный класс $\mathbf{Q}$.

Нет никакой гарантии, что множество НМ-граничных классов совпадает с множеством НМ-граничных классов относительно класса планарных графов. Несмотря на это обстоятельство, единственность класса $\mathbf{T}$, как НМ-граничного относительно **Planar**, может служить косвенным подтверждением справедливости гипотезы В. Е. Алексеева.

Вопрос о существовании НМ-граничных относительно **Planar** классов, отличных от класса $\mathbf{T}$, эквивалентен вопросу о существовании такого $G \in \mathbf{T}$, что класс $\mathbf{Planar} \cap Free(\{G\})$ является НМ-сложным. Хотя единственность класса $\mathbf{T}$ и в рассматриваемом случае доказать не удается, имеется более значительный прогресс к достижению этой цели, чем в случае НМ-граничных классов. Именно, удается показать НМ-простоту некоторых классов графов указанного вида.

4.3 Полиномиальная разрешимость задачи НМ в классе планарных графов, не содержащих больших порожденных яблок

Яблоком A_k называется граф, получаемый из цикла длины k добавлением одной вершины, смежной с произвольной его вершиной. Яблоко изображено на рисунке 4.2.

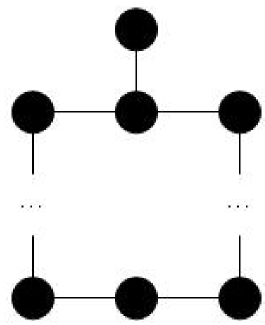

Рис. 4.2: Яблоко

В данном разделе для любого $s \geq 3$ рассматривается задача о независимом множестве в классе $\mathbf{Planar} \cap Free(\{A_s, A_{s+1}, \ldots\})$. Далее будет показана НМ-простота этого класса при любом фиксированном $s \geq 3$. Данное утверждение является основным результатом настоящей главы диссертации. Отсюда легко следует, что при любых фиксированных i и j класс $\mathbf{Planar} \cap Free(\{T_{1,i,j}\})$ является НМ-простым. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $\mathbf{Planar} \cap Free(\{T_{1,i,j}\}) \subseteq \mathbf{Planar} \cap Free(\{A_{i+j+1}, A_{i+j+2}, \ldots\})$.

Далее будут использоваться следующие обозначения: $N(x)$ — окрестность вершины x; $N_2(a)$ — множество вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины a; $N(a,b)$ — множество вершин, смежных с вершинами a и b одновременно; $d(x,y)$ — расстояние между вершинами x и y.

4.3.1 Сжатия и связанные с ними утверждения

На первом этапе доказательства нашим главным алгоритмическим инструментом будут сжатия, описанные в работе [1]. *Сжатием* называется отображение множества вершин графа в себя, не являющееся автоморфизмом, при котором любые две различные несмежные вершины переходят в различные и несмежные. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порожденный подграф, при этом, очевидно, сохраняется размер наибольшего независимого множества. Здесь мы будем использовать только сжатия первого и второго порядков, т.е. такие, при которых все вершины, кроме одной или двух, остаются неподвижными.

Сжатие φ первого порядка записывается в виде $\binom{a}{b}$, это означает, что $\varphi(a) = b$, а остальные вершины неподвижны. Такое преобразование действительно является сжатием тогда и только тогда, когда $N(b) \setminus \{a\} \subseteq N(a) \setminus \{b\}$.

Преобразование $\binom{a\ b}{c\ d}$ ($\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, остальные неподвижны) является сжатием второго порядка, если

- $c \neq d$;
- в графе есть ребра (a, c) и (b, d) и нет ребер (a, b) и (c, d);
- каждая вершина, смежная с вершиной c, кроме a и b, смежна и с a;
- каждая вершина, смежная с вершиной d, кроме a и b, смежна и с b.

Граф назовем *несжимаемым*, если для него нет сжатий первого и второго порядка. Несжимаемый подграф данного графа, получающийся из него последовательностью сжатий первого и второго порядка, называется 2-*основой* графа. Граф может иметь несколько 2-основ (например, у графа C_4 их две), но, как показано в [1], все они изоморфны. Очевидно, 2-основа графа может быть найдена за полиномиальное время.

Лемма 9. *Пусть G — несжимаемый граф из* $\mathbf{Planar} \cap Free(\{S_i\})$*, a и b — его вершины, $d(a, b) = 2$. Тогда $|N(a) \cap N(b)| \leq 4i + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вершину $x \in N(a) \cap N(b)$ назовем

- *особой*, если каждая смежная с x вершина, кроме a и b, принадлежит $N(a) \cap N(b)$;
- *a-чистой* (*b-чистой*), если существует вершина, смежная с x и несмежная с вершиной a (с вершиной b).

Отметим, что каждая вершина из $N(a) \cap N(b)$ принадлежит к одной из этих трех категорий. Оценим число вершин каждого типа.

Допустим, имеется четыре особые вершины. Тогда, ввиду планарности графа G, среди них найдутся две несмежные. Пусть это вершины x и y. Но тогда отображение $\binom{a\,b}{x\,y}$ является сжатием. Следовательно, имеется не больше трех особых вершин.

Допустим, имеется $2i$ a-чистых вершин. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Она определяет циклическое упорядочение ребер, инцидентных каждой вершине, а следовательно, и смежных вершин. Пусть $x_1, \ldots, x_{2i}$ — a-чистые вершины, расположенные в циклическом порядке, определяемом данной укладкой, относительно вершины a. Пусть y_j — произвольная вершина, смежная с x_j и несмежная с a. Некоторые из вершин множества $\{y_1, y_2, \ldots, y_{2i}\}$ могут совпадать, но вершины $y_1, y_3, y_5, \ldots, y_{2i-1}$ попарно различны и не смежны между собой. Тогда множество $\{a, x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2i-1}, y_1, y_3, y_5, \ldots, y_{2i-1}\}$ порождает подграф S_i. Таким образом, имеется не более $2i-1$ a-чистых и не более $2i-1$ b-чистых вершин, а всего не более $4i+1$ вершин в $N(a) \cap N(b)$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *В несжимаемом графе из* $\mathbf{Planar} \cap Free(\{S_i\})$ *степень каждой вершины не превосходит* $16i^2 - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a — вершина степени d в несжимаемом графе $G \in \mathbf{Planar} \cap Free(\{S_i\})$. Рассмотрим двудольный подграф H, образованный множествами вершин $A = N(a)$, $B = N_2(a)$ и всеми ребрами графа G, соединяющими вершины из A с вершинами из B. Пусть π — мощность наибольшего паросочетания, а β — мощность наименьшего вершинного покрытия графа H. По теореме Кенига $\pi = \beta$.

Если вершина $x \in A$ не смежна ни с одной вершиной из B, то отображение $\binom{a}{x}$ является сжатием. Следовательно, каждая вершина из A смежна хотя бы с одной вершиной из B и в графе H имеется d ребер, попарно не имеющих общих вершин в множестве A. По лемме 9 каждая вершина из множества B имеет в графе H степень не более $4i+1$. Значит, для того, чтобы покрыть эти d ребер, требуется не менее $\frac{d}{4i+1}$ вершин. Следовательно, $\pi \geq \frac{d}{4i+1}$.

Возьмем в графе H какое-либо паросочетание с π ребрами и рассмотрим планарный граф $H^{'}$, полученный из графа H стягиванием всех ребер этого паросочетания. Если $d \geq (4i+1)(4i-1)+1$, то в графе $H^{'}$ не менее $4i$ вершин. Из теоремы о четырех красках следует, что в графе $H^{'}$ имеется независимое множество, состоящее из i вершин. Вершинам этого множества в графе H соответствуют $2i$ ребер, образующие вместе с инцидентными им вершинами порожденный подграф iK_2. Но тогда эти $2i$ вершин вместе с вершиной a порождают в графе G звезду S_i. Лемма 10 доказана.

4.3.2 Минорно безапексные графы большой древесной ширины

В этом подразделе речь идет об определенном свойстве графов, не содержащих произвольных апексных графов в качестве минора. Это свойство нам понадобится для доказательства основного результата.

Граф называется *апексным*, если удаление некоторой его вершины приводит к планарному подграфу. Например, граф K_5 является апексным, поскольку удаление любой его вершины приводит к планарному подграфу K_4. Граф H называется *минором* графа G, если H может быть получен из графа G операциями удаления вершин и ребер, а также операциями стягивания ребра. Если граф H не является минором графа G, то G называется H*-безминорным*. Скажем, из критерия Вагнера следует, что любой планарный граф является как K_5-безминорным, так и $K_{3,3}$-безминорным.

Нам также понадобиться понятие древесной декомпозиции графа. Древесная ширина является полезной числовой характеристикой графов при исследовании сложности различных задач на графах. Это обусловлено тем, что для любой наперед заданной константы некоторые задачи полиномиально разрешимы в классе графов, у которых древесная ширина ограничена этой константой (много информации по этому поводу можно найти в [24]).

Древесным разложением графа G называется пара (T, W), где T — дерево,

$W \subseteq 2^{V(G)}$ и с каждой вершиной v дерева T связан элемент W_v множества W так, что выполняются следующие условия:

1). $V(G) = \bigcup\limits_{v \in V(T)} W_v$.

2). Для каждого ребра $(a, b) \in E(G)$ существует некоторая вершина v дерева T, что a и b принадлежат W_v.

3). Для каждой вершины $a \in V(G)$ множество $\{v \in V(T) : a \in W_v\}$ образует связное поддерево в дереве T.

Шириной древесного разложения (T, W) называется величина $tw(T, W) = max_{v \in V(T)}(|W_v| - 1)$ и *древесной шириной графа* G называется величина $tw(G) = min(tw(T, W))$, где минимум берется по всевозможным древесным разложениям (T, W) графа G.

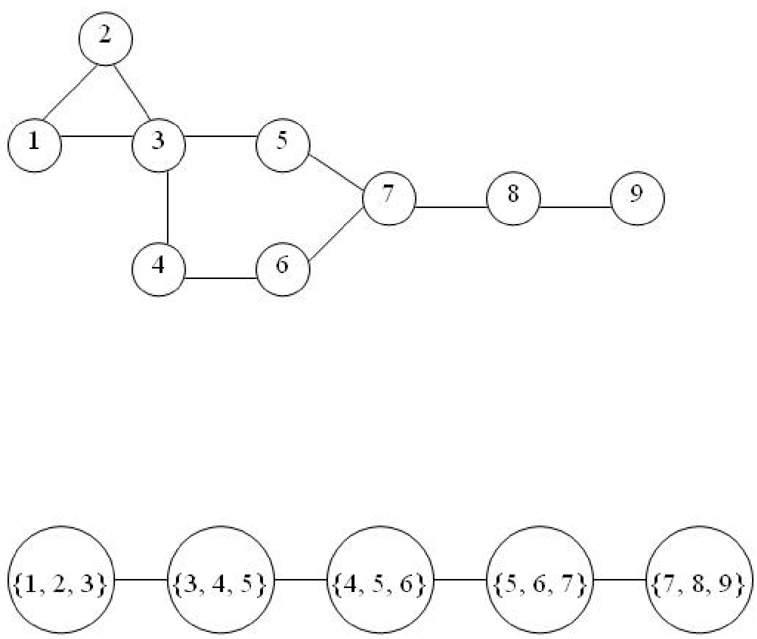

Рис. 4.3: Граф и его древесное разложение ширины 2

В [23] доказано следующее утверждение.

Лемма 11. *Для любого фиксированного апексного графа H и любых фиксированных натуральных чисел k, s, d существует такое натуральное* *число $N = N(H, k, s, d)$, что для любого H-безминорного графа G древесной ширины не менее чем N и любого его непустого подмножества вершин S ($|S| \leq s$) граф G содержит простой цикл C, обладающий следующими двумя свойствами:*

- *каждая вершина графа G не смежна с некоторыми k последовательными вершинами цикла C.*
- *расстояние между S и C (т.е. наименьшее среди попарных расстояний между двумя вершинами, одна из которых принадлежит S, а другая C) не менее чем d.*

4.3.3 Доказательство основного результата

Разделяющая клика графа — множество вершин, порождающее полный подграф, удаление которого приводит к увеличению количества компонент связности. Известно, что задача НМ для графов из наследственного класса $\mathbf{X}$ полиномиально сводима к той же задаче для графов из $\mathbf{X}$, не содержащих разделяющих клик.

Теорема 6. *Для любого фиксированного $k \geq 3$ задача* НМ *в классе* $\mathbf{Planar} \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ *полиномиально разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathbf{Planar} \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$. Не уменьшая общности можно считать, что граф G является несжимаемым и не содержит разделяющих клик. Если $G \in Free(\{S_{11}\})$, то из леммы 10 следует, что степень каждой вершины графа G не превосходит 1935. Известно [43], что для любых фиксированных d и k класс графов $\mathbf{Deg}(d) \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ является НМ-простым. Таким образом, можно считать, что граф G содержит порожденный подграф S_{11}. Вершину степени 11 этого подграфа обозначим через a, вершины степени 2 обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$, а вершины степени 1 обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_{11}$. Будем считать, что $(b_1, c_1) \in E(G), (b_2, c_2) \in$

$E(G), \ldots, (b_{11}, c_{11}) \in E(G)$.

Пусть $N = N(K_5, 6k-14, 23, [\frac{k}{2}]+3)$ — число, определенное в лемме 11. Покажем, что древесная ширина графа G не превосходит N. Предположим противное. Пусть S — множество вершин звезды S_{11}. Тогда из леммы 11 следует, что граф G содержит простой цикл C, для которого выполняются два следующих свойства:

- каждая вершина графа G не смежна с некоторыми $6k-14$ последовательными вершинами цикла C.
- расстояние между S и C не менее чем $[\frac{k}{2}]+3$.

Центральное место в доказательстве теоремы 6 занимает утверждение 1.

Утверждение 1. *Граф G содержит простой цикл, проходящий через вершину a и некоторые вершины цикла C.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. G не содержит разделяющих клик, то этот граф является двусвязным. Таким образом, существуют два непересекающиеся по вершинам простых пути, соединяющие вершину a с некоторыми двумя вершинами цикла C. Пусть $P_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ и $P_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_q)$ — два простых пути, где вершины x_1 и y_1 смежны с вершиной a, а вершины x_p и y_q смежны с некоторыми вершинами из C. Можно считать, что суммарная длина путей P_1 и P_2 минимально возможная. Это означает, что среди вершин путей P_1 и P_2 вершина a смежна только с x_1 и y_1. Аналогично, ни одна из вершин этих путей, кроме x_p и y_q, не смежна ни с одной из вершин цикла C. Для доказательства утверждения 1 нам понадобятся еще четыре утверждения.

В справедливости утверждения 2 легко убедиться непосредственной проверкой.

Утверждение 2. *Любая из вершин графа G смежна не более чем с 4 вершинами цикла C. Более того, если вершина v графа G смежна ровно с*

2 вершинами цикла C, то либо эти вершины стоят последовательно, либо между ними находится ровно 1 вершина. Если v смежна ровно с 3 вершинами из C, то эти три вершины стоят последовательно. Если v смежна ровно с 4 вершинами цикла C, то эти вершины можно разбить на 2 пары смежных вершин.

Утверждение 3. *Множество вершин цикла C, которые смежны с вершиной x_p, состоит в точности из двух смежных вершин. Это же верно и для вершины y_q.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что вершина x_p смежна хотя бы с двумя вершинами цикла C. Рассмотрим максимальный путь $P^{'}$, образованный последовательными вершинами цикла C, с каждой из которых вершина x_p не смежна. Данный путь содержит не менее чем $6k - 14$ вершин. Из максимальности пути $P^{'}$ следует, что существуют такие различные вершины u и v цикла C, каждая из которых смежна с вершиной x_p и с одной из концевых вершин пути $P^{'}$. Если вершины u и v являются несмежными, то для некоторого $s \geq k$ граф G содержит порожденный вершинами пути $P^{'}$ и вершинами u, v, x_p, x_{p-1} подграф A_s. Последнее невозможно, поэтому вершины u и v являются смежными. Отсюда следует справедливость первой части утверждения 3. Вторая часть утверждения может быть доказана по аналогии с первой. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Существует вершина цикла C, которая смежна только с одной из вершин множества $\{x_p, y_q\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда из утверждения 3 следует, что существуют две такие последовательные вершины u и v цикла C, каждая из которых смежна с x_p и y_q. Т.к. граф G является C-блоком, то в любой плоской укладке G одна из вершин множества $\{x_p, y_q\}$ расположена внутри цикла C, другая снаружи этого цикла. Но тогда существуют два пути, соединяющие вершину a с двумя вершинами C, суммарная длина которых меньше суммарной длины P_1 и P_2. Получаем противоречие. Утверждение доказано.

Любое ребро графа G, соединяющее вершину пути P_1 с вершиной пути P_2, назовем (P_1, P_2)-*хордой.*

Утверждение 5. *Если граф G содержит (P_1, P_2)-хорды, то (x_1, y_1) — единственная (P_1, P_2)-хорда.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x_i, y_j) — (P_1, P_2)-хорда, отличная от (x_1, y_1), для которой величина $i + j$ принимает максимально возможное значение. Т.к. G не содержит больших порожденных яблок, то x_i смежна с y_{j-1} и y_j смежна с x_{i-1} (считаем, что $x_0 = y_0 = a$). Отсюда следует, что $i > 1$ и что $j > 1$. Рассмотрим цикл C', образованный вершинами $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_q$ и частью вершин цикла C. В любой плоской укладке G одна из вершин множества $\{x_{i-1}, y_{j-1}\}$ расположена внутри цикла C', другая снаружи. Это невозможно, т.к. противоречит выбору путей P_1 и P_2 (см. утверждение 4). Утверждение доказано.

Продолжим доказательство утверждения 1. Из утверждения 5 следует, что если (x_1, y_1) не является (P_1, P_2)-хордой, то желаемый цикл образуется вершиной a, вершинами путей P_1 и P_2, а также не менее чем $3k - 7$ последовательными вершинами цикла C. Поэтому можно считать, что $(x_1, y_1) \in E(G)$. Обозначим через C' простой цикл, образованный вершинами путей P_1, P_2 и некоторыми последовательными вершинами цикла C, которые образуют простой путь P' длины не менее чем $3k - 6$.

Т.к. G не содержит разделяющих клик, то среди вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ существует вершина z_1, не смежная ни с x_1, ни с y_1. Покажем, что z_1 не смежна ни с одной вершиной цикла C'. Поскольку суммарная длина путей P_1 и P_2 минимально возможная, то вершина z_1 не смежна ни с одной из вершин множества $\{x_3, x_4, \ldots, x_p, y_3, y_4, \ldots, y_q\}$. Легко проверить, что z_1 не смежна также ни с x_2, ни с y_2 (ввиду того, что граф G не содержит больших порожденных яблок).

Поскольку граф G не содержит разделяющих клик, то в графе, порожденном множеством вершин $V(G) \setminus \{a, x_1, y_1\}$, существует путь, одна из концевых вершин которого совпадает с z_1, а другая смежна с некоторой вершиной цикла C'. Пусть $P_3 = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$ — кратчайший среди таких путей. Понятно, что $r > 1$. Из утверждения 2 следует, что вершина z_r не может быть смежна с 5 вершинами пути P'. Поэтому из того же утверждения 2 следует, что существует не менее чем $k-3$ последовательных вершин пути P', не смежных с вершиной z_r. Значит, существуют $k-3$ последовательных вершин цикла C', каждая из которых не смежна с z_r. По аналогии с утверждением 3 можно показать, что множество вершин цикла C', которые смежны с вершиной z_r, состоит в точности из двух смежных вершин. Аналогично утверждению 4 можно показать, что либо $(z_r, x_1) \notin E(G)$, либо $(z_r, y_1) \notin E(G)$. По аналогии с утверждением 5 можно показать, что единственным ребром, инцидентным вершине a и некоторой вершине пути P_3, может быть только ребро (a, z_2). Таким образом, граф G имеет простой цикл, содержащий вершину a и некоторые вершины цикла C. Первое утверждение доказано.

Вернемся к непосредственному доказательству теоремы. Пусть $C^* = (a, v_1, v_2, \ldots, v_s)$ — простой цикл, содержащий вершину a и часть вершин цикла C. Вершины цикла C^*, принадлежащие циклу C, обозначим через $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$. Т.к. расстояние между S и C не менее чем $[\frac{k}{2}] + 3$, то ни одна из вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ не смежна ни с одной из вершин множества $\{v_{i-[\frac{k}{2}]}, v_{i-[\frac{k}{2}]+1}, \ldots, v_{[\frac{k}{2}]+j}\}$. Ясно, что среди вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ не менее девяти вершин не принадлежат циклу C^*. Среди этих девяти вершин не менее пяти не смежны ни с v_1, ни с v_s (в противном случае либо ребро (v_s, a), либо ребро (a, v_1) принадлежит трем треугольникам, поэтому граф G содержит разделяющую клику). Не уменьшая общности можно считать, что вершины $b_1, b_2, \ldots, b_5$ принадлежат циклу C^* и каждая из них не смежна ни с v_1, ни с v_s. Поскольку граф G не содержит больших порожденных яблок, то ни одна из вершин $b_1, b_2, \ldots, b_5$ не может быть смежна ни с одной из вершин множества $\{v_3, v_4, \ldots, v_{i-[\frac{k}{2}]-1}, v_{[\frac{k}{2}]+j+1}, v_{[\frac{k}{2}]+j+2}, \ldots, v_{s-2}\}$. По тем же причинам ни одна из этих пяти вершин не может быть одновременно смежна и с v_2 и с v_{s-1} или одновременно несмежна ни с v_2, ни с v_{s-1}. Таким образом, либо вершина v_2, либо вершина v_{s-1} смежна с тремя из рассматриваемых пяти вершин. Можно считать, что вершина v_2 смежна с тремя такими вершинами. Тогда в любой плоской укладке графа G среди данных трех вершин существуют такие вершины b_i и b_j, что вершина b_j лежит внутри цикла (a, b_i, v_2, v_1). Рассмотрим 2 возможных случая:

1. $(c_j, v_2) \notin E(G)$. Тогда вершины цикла C^*, кроме v_1, а также вершины b_j и c_j образуют большое порожденное яблоко.

2. $(c_j, v_2) \in E(G)$. Тогда вершины цикла C^*, кроме v_1, а также вершины b_i и c_j образуют большое порожденное яблоко.

Таким образом, предположив, что древесная ширина графа G не менее чем N, мы пришли к противоречию. Поэтому $tw(G) < N$. Отсюда следует, что при любом фиксированном k класс **Planar** $\cap$ $Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ является НМ-простым. Теорема 6 доказана.

Вопросы и задачи

1. Верно ли, что для любой задачи на графах есть а). граничные классы б). минимальные сложные классы?

2. Для следующих множеств $\mathbf{M}$ определить, является ли класс **Planar** $\cap$ $Free(\mathbf{M})$ ДМ-простым:

- $\mathbf{M} = \{C_3, C_4, P_8\}$
- $\mathbf{M} = \{K_4, K_{1,4}, T_{2,2,2}\}$
- $\mathbf{M} = \{B_2, C_3, C_4, K_6\}$
- $\mathbf{M} = \{T_{2,2,2}, K_3\}$
- $\mathbf{M} = \{C_3, C_4, C_5, \ldots\}$

3. Доказать, что класс $\mathbf{Planar} \cap \mathbf{Deg}(3) \cap Free(\{T_{2,2,2}, C_4, C_5\})$ является НМ-простым.

Глава 5

Задачи на графах с континуальным множеством граничных классов

Изучение структуры граничных классов графов для тех или иных задач является интересной исследовательской проблемой. На настоящее время имеется достаточное количество результатов такого рода. В то же время, существуют задачи на графах, для которых до недавнего времени не удавалось найти ни одного граничного класса. К числу последних относились задачи о гамильтоновом цикле, о вершиной 3-раскраске, и т.п. Тем не менее, если рассматривать не только проблему выявления, то некоторые результаты о множестве граничных классов для таких задач удавалось получить. Так, в работе [21] рассматривался вопрос о мощности этого множества для некоторых задач на графах.

Количество граничных классов для той или иной задачи является интересной характеристикой. Из теоремы 3 следует, что этот параметр задачи Π можно рассматривать как меру сложности описания всех конечно определенных Π-сложных классов графов. До настоящего времени ни для одной задачи не была известна мощность множества граничных классов. Поэтому представлялось целесообразным получение именно оценок этой величины.

Первую нижнюю оценку мощности множества граничных классов для любой NP-полной задачи на графах доставляет та же теорема 3. Из этой теоремы следует, что для любой такой задачи существует хотя бы один граничный класс.

Для некоторых конкретных задач данная оценка может быть усилена. Так, в работе [21] показано, что для задачи о гамильтоновом цикле существует не менее 5 граничных классов. Аналогичная оценка справедлива и для задачи о вершинной 3-раскраске [21]. При этом ни одного конкретного граничного класса для них найдено не было. Данные оценки послужили основанием для выдвижения гипотезы о существовании задачи на графах, для которой множество граничных классов является бесконечным [21].

Настоящая глава пособия посвящена доказательству этого предположения. Именно, для задачи о вершинной 3-раскраске (далее, просто задачи 3-ВР) и для задачи о реберной 3-раскраске (далее, просто задачи 3-РР) указываются континуальные множества граничных классов графов.

5.1 Задача о вершинной 3-раскраске

Введем понятие замены ребра графом G, содержащим ровно 2 вершины степени 2. *Операция замены ребра* $e = (a, b)$ некоторого графа графом G состоит в удалении этого ребра с последующим отождествлением вершины a с одной вершиной степени 2 графа G и вершины b с другой вершиной степени 2 графа G. Считаем, что граф G содержит автоморфизм, переводящий вершины степени 2 друг в друга, поэтому получившийся граф не зависит от того, какая именно вершина степени 2 графа G отождествляется с вершиной a.

Обозначим через $Diamond$ граф, получаемый из графа K_4 удалением произвольного ребра. Пусть Fan — граф, получаемый добавлением одной вершины к графу P_5 и всех ребер, соединяющих эту вершину с вершинами данного пути, $Tank$ — граф, получаемый из графа $2K_3$ добавлением двух ребер, не имеющих общих вершин. Графы $Diamond$, Fan и $Tank$ изображены на рисунке 5.1.

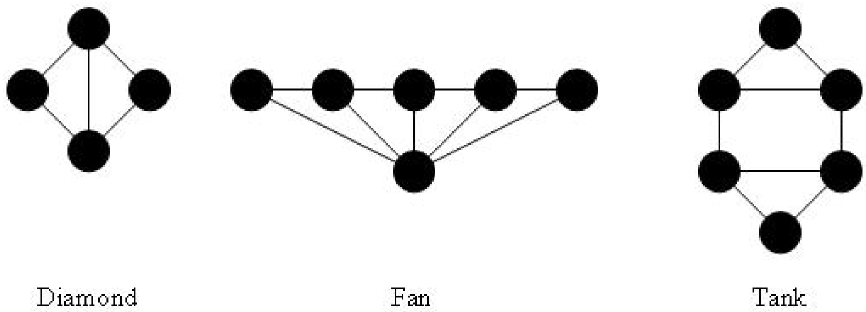

Рис. 5.1: Графы Diamond, Fan и Tank

Для произвольной бинарной последовательности $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ назовем π-*гирляндой* граф, получаемый из простого пути P_{2k+1} заменой каждого его ребра. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i-е и $(2k+1-i)$-е ребра этого пути заменяются графом $Diamond$, если $\pi_i = 0$, или графом Fan, если $\pi_i = 1$.

Продемонстрируем строение π-гирлянд на примере двух последовательностей $\pi_1 = \{0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0\}$ и $\pi_2 = \{1, 0, 0, \ldots, 0, 0\}$. Соответствующие гирлянды изображены на рисунках 5.2 и 5.3.

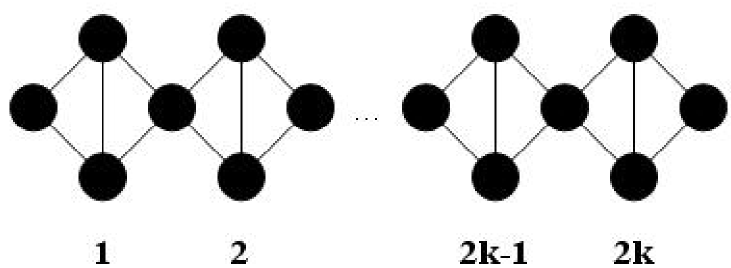

Рис. 5.2: π_1-гирлянда

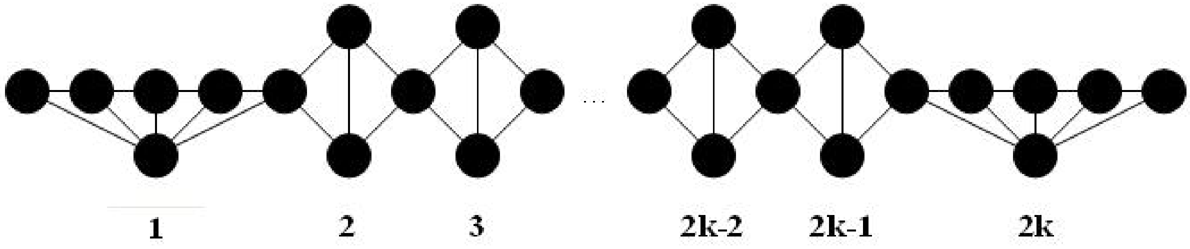

Рис. 5.3: π_2-гирлянда

Введем понятие π-*преобразования вершины*. Пусть окрестность вершины v некоторого графа состоит из четырех вершин x_1, x_2, y_1, y_2, причем порожденный этими четырьмя вершинами подграф содержит ровно два ребра (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Применение π-преобразования к вершине v состоит в том, что:

1. Вершину v заменяем на две вершины v_1 и v_2. Вершину v_1 соединяем ребрами с вершинами x_1, x_2, а вершину v_2 с вершинами y_1, y_2.
2. Вершину v_1 отождествляем с одной вершиной степени 2 π-гирлянды, а вершину v_2 отождествляем с другой такой вершиной.

Обозначим через $\mathbf{K}$ множество 4-регулярных графов (т.е. графов, степени всех вершин которых равны 4) класса $Free(K_{1,3}, K_4, Diamond)$. Пусть $G \in \mathbf{K}$. Ясно, что окрестность любой вершины v этого графа представляет собой граф $2K_2$. *π_V-преобразованием графа G* является последовательное применение π-преобразования ко всем вершинам, окрестности которых изоморфны графу $2K_2$ и которые не содержатся в порожденном подграфе $Diamond$. Заметим, что в получившемся графе нет вершин, окрестность которых порождает подграф $2K_2$. Обозначим через G_{π_V} граф, получаемый π_V-преобразованием из графа G. Все множество таким образом сформированных графов из графов класса $\mathbf{K}$ обозначим через $\mathbf{K}_\pi$.

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 12. *Граф $G \in \mathbf{K}$ является вершинно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда для любой конечной бинарной последовательности π граф G_{π_V} является вершинно 3-раскрашиваемым.*

Для произвольной конечной бинарной последовательности π через D_π будем обозначать граф, получаемый отождествлениями трех вершин степени 2, принадлежащих трем копиям π-гирлянды, с тремя различными вершинами треугольника. Для произвольной бесконечной бинарной последовательности $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ через $\mathbf{D}_\pi$ обозначим совокупность графов, каждая компонента связности которых принадлежит наследственному замыканию множества графов $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{D_{\pi^{(k)}}\}$, где $\pi^{(k)} = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$.

Лемма 13. *Для любой бесконечной двоичной последовательности* π *класс* $\mathbf{D}_\pi$ *является* 3-ВР-*предельным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [38], что задача 3-ВР для графов класса $\mathbf{K}$ является NP-полной. Отсюда и из леммы 12 следует, что для любого i эта задача NP-полна в классе $\mathbf{K}_{\pi^{(i)}}$. Поэтому при любом s класс $\mathbf{X}_s$ — наследственное замыкание множества $\bigcup\limits_{j=s}^{\infty}\mathbf{K}_{\pi^{(j)}}$ является 3-ВР-сложным. Докажем справедливость равенства $\mathbf{D}_\pi = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$.

Для произвольного графа $G \in \mathbf{D}_\pi$ существуют такие натуральные числа n и k, что для любого $j \geq k$ граф G является порожденным подграфом графа $nD_{\pi^{(j)}}$. Очевидно, что для любых n, k, s граф $nD_{\pi^{(k)}}$ принадлежит классу $\mathbf{X}_s$ (поскольку при любом s класс $\mathbf{X}_s$ является наследственным). Таким образом, произвольный граф $G \in \mathbf{D}_\pi$ принадлежит классу $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$. Поэтому имеет место включение $\mathbf{D}_\pi \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$. Тогда существует такая бесконечная монотонно возрастающая последовательность $\{j_d\}$, что для любого натурального d граф G принадлежит наследственному замыканию множества графов $\mathbf{K}_{\pi^{(j_d)}}$. Отсюда, положив $d = |V(G)| + 1$, заключаем, что для некоторых n и $k < d$ граф G является порожденным подграфом графа $nD_{\pi^{(k)}}$. Таким образом, граф G принадлежит классу $\mathbf{D}_\pi$. Поэтому справедливо включение $\mathbf{D}_\pi \supseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$. Лемма 13 доказана.

Пусть $\mathbf{X}$ — некоторый наследственный класс графов, тогда обозначим через $\mathbf{X}^{(3)}$ множество графов класса $\mathbf{X}$, содержащих только вершины степени не менее чем k.

Лемма 14. *Если класс* $\mathbf{X}$ *является* 3-ВР-*сложным, то наследственное замыкание класса* $\mathbf{X}^{(3)}$ *является* 3-ВР-*сложным классом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathbf{X}$ и G содержит вершину v степени не более чем 2, $G^{'}$ — граф, порожденный множеством вершин $V(G) \setminus \{v\}$. Очевидно, граф G является вершинно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таким свойством обладает граф $G^{'}$. Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Пусть* $\mathbf{B}$ — 3-ВР-*граничный класс и граф* $G_1 \in \mathbf{B}$ *содержит вершину* x *степени не более чем* 2. *Тогда существует такой граф* $G_2 \in \mathbf{B}$, *что* G_1 *является порожденным подграфом графа* G_2, *а вершина* x *в графе* G_2 *имеет степень, равную* 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. $\mathbf{B}$ — 3-ВР-граничный класс, то существуют такие наследственные 3-ВР-сложные классы $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i = \mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{B}_i^{'}$ — наследственное замыкание класса $\mathbf{B}_i^{(3)}$. Ясно, что $\mathbf{B}_1^{'} \supseteq \mathbf{B}_2^{'} \supseteq \ldots$ и что при любом i класс $\mathbf{B}_i^{'}$ является 3-ВР-сложным. Поэтому, если $\mathbf{B}^{'} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i^{'}$, то класс $\mathbf{B}^{'}$ является предельным для задачи 3-ВР. Т.к. $\mathbf{B}_i^{'} \subseteq \mathbf{B}_i$ для любого i, то $\mathbf{B}^{'} \subseteq \mathbf{B}$, но $\mathbf{B}$ — минимальный 3-ВР-предельный класс, поэтому $\mathbf{B}^{'} = \mathbf{B}$.

Т.к. $G_1 \in \mathbf{B}$, то $G_1 \in \mathbf{B}^{'}$. Тогда $G_1 \in \mathbf{B}_1^{'}, G_1 \in \mathbf{B}_2^{'}, \ldots$. По построению класса $\mathbf{B}_i^{'}$ для любого i существует такой граф $G_2^i \in \mathbf{B}_i^{'}$, что G_1 порожден в G_2^i, а вершина x имеет степень, равную k. Пусть граф G_2^i является наименьшим с этим свойством, тогда $|V(G_2^i)| - |V(G_1)| < k + 1$. Пусть $\mathbf{M} = \{G_2^1, G_2^2, \ldots\}$. Очевидно, $\mathbf{M}$ — конечное множество. Поэтому существует граф G_2, принадлежащий $\mathbf{B}_s^{'}$ для бесконечно многих значений s. Отсюда и из включения $\mathbf{B}_1^{'} \supseteq \mathbf{B}_2^{'} \supseteq \ldots$ следует, что $G_2 \in \mathbf{B}_i^{'}$ для любого i, т.е. $G_2 \in \mathbf{B}$. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Пусть* $G \in Free(\{K_{1,s}\})$ *— произвольный вершинно* 3-*раскрашиваемый граф. Тогда* $G \in \mathbf{Deg}(2s-2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — произвольная вершина графа G. Рассмотрим окрестность этой вершины и любую вершинную 3-раскраску графа G. Понятно, что мощность пересечения любого цветного класса и окрестности вершины x не превосходит $s-1$. Отсюда следует, что $deg(x) \leq 2(s-1)$. Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Для любого* 3-ВР-*граничного класса* $\mathbf{B}$ *либо* $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{T}$, *либо* $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{D}$, *либо* $\mathbf{B} \supseteq \{K_{1,s}, s \in \{1, 2, \dots\}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда для некоторых натуральных чисел s, p, q, i, j справедливо включение $\mathbf{B} \subseteq Free(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\})$ (граф $D_{j,j,j}$ — реберный граф к графу $T_{j+1,j+1,j+1}$). Пусть $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \dots$ — произвольная сходящаяся к $\mathbf{B}$ последовательность 3-ВР-сложных классов графов. Т.к. $\mathbf{B} \subseteq Free(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\})$, то существует такое r^*, что для любого $r > r^*$ справедливо включение $\mathbf{B}_r \subseteq Free(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\})$. Для любого r рассмотрим класс графов $\mathbf{B}_r^{'} = \mathbf{B}_r \cap \mathbf{Deg}(2s-2)$. Из леммы 16 следует, что при любом $r > r^*$ все графы из $\mathbf{B}_r \setminus \mathbf{B}_r^{'}$ не являются вершинно k-раскрашиваемыми. Поэтому при любом $r > r^*$ задача k-ВР в классе графов $\mathbf{B}_r$ полиномиально эквивалента той же задаче в классе $\mathbf{B}_r^{'}$.

Известно [24], что для любых заданных натуральных чисел d и t класс $\{G|\ tw(G) \leq t,\ \forall x \in V(G) : deg(x) \leq d\}$ является 3-ВР-простым. Известно также [21], что для любых $G_1 \in \mathbf{T}, G_2 \in \mathbf{D}$ и любого натурального k древесная ширина графов из $\mathbf{Deg}(k) \cap Free(\{G_1, G_2\})$ ограничена сверху числом $N^{'} = N^{'}(k, G_1, G_2)$. Отсюда следует, что при любом $r > r^*$ класс $\mathbf{B}_r^{'}$ является 3-ВР-простым. Значит, при любом $r > r^*$ класс $\mathbf{B}_r$ является 3-ВР-простым. Получаем противоречие с граничностью класса $\mathbf{B}$. Таким образом, предположение неверно. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Пусть для некоторой бесконечной бинарной последовательности* π *и некоторого* 3-ВР-*граничного класса* $\mathbf{B}$ *выполняется включение* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{D}_\pi$*, причем для некоторого* k *граф* $kD_{1,1,1}$ *принадлежит классу* $\mathbf{B}$*. Тогда класс* $\mathbf{B}$ *содержит наследственное замыкание класса* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kD_{\pi(i)}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда для некоторого i граф $kD_{\pi(i)}$ не принадлежит классу $\mathbf{B}$. Рассмотрим граф $G \in \mathbf{B}$ — максимальный по включению порожденный подграф графа $kD_{\pi(i)}$, содержащий порожденный подграф $kD_{1,1,1}$. Очевидно, что граф G обязательно содержит вершину x степени не более чем 2, которая в графе $kD_{\pi(i)}$ имеет степень не менее чем 3. Тогда из доказательства леммы 15 следует, что в классе $\mathbf{B}$ существует такой граф G', в котором граф G является собственным порожденным подграфом и $deg(x) \geq 3$. Поэтому граф G не является максимальным по включению. Получаем противоречие. Таким образом, исходное предположение неверно. Лемма 18 доказана.

Основной результат этого подраздела составляет следующее утверждение.

Теорема 7. *Для любой бесконечной бинарной последовательности* π *класс* $\mathbf{D}_\pi$ *является* 3-ВР-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что имеет место включение $\mathbf{D}_\pi \subseteq Free(\{K_{1,4}, T_{2,2,2}\})$. Таким образом, если для некоторого 3-ВР-граничного класса $\mathbf{B}$ выполнено включение $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{D}_\pi$, то $\mathbf{B} \not\supseteq \{K_{1,s}, s \in \{1, 2, \ldots\}\}$ и $\mathbf{B} \not\supseteq \mathbf{T}$. Поэтому из леммы 17 следует, что $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{B}$, т.е. при любом k граф $kD_{1,1,1}$ принадлежит классу $\mathbf{B}$. Тогда из леммы 18 следует, что при любом k класс $\mathbf{B}$ содержит наследственное замыкание класса $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kD_{\pi(i)}\}$. Поэтому $\mathbf{D}_\pi \subseteq \mathbf{B}$.

Таким образом, $\mathbf{B} = \mathbf{D}_\pi$, т.е. класс $\mathbf{D}_\pi$ является 3-ВР-граничным. Теорема 7 доказана.

Ясно, что для различных бесконечных двоичных последовательностей π_1 и π_2 классы $\mathbf{D}_{\pi_1}$ и $\mathbf{D}_{\pi_2}$ различны. Отсюда и из предыдущей теоремы следует, что множество $\Phi = \{\mathbf{D}_\pi : \pi$ — бесконечная бинарная последовательность$\}$ является континуальным множеством попарно различных 3-ВР-граничных классов графов. Поэтому и само множество всех 3-ВР-граничных классов континуально.

5.2 Задача о реберной 3-раскраске

В предыдущем подразделе было указано континуальное множество конкретных классов графов, каждый из которых является 3-ВР-граничным. Данный подраздел посвящен выявлению такого множества для задачи о реберной 3-раскраске. Данная задача для заданного графа состоит в том, чтобы определить, имеет ли этот граф правильную раскраску ребер в три цвета. Подход к нахождению этого множества во многом схож с соответствующими рассуждениями для задачи 3-ВР.

Для произвольной бинарной последовательности π длины k назовем π-*связкой* граф, получаемый из простого пути P_{4k+2} заменами его ребер. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ $2i$-е и $(4k + 2 - 2i)$-е ребра этого пути заменяются графом $Diamond$, если $\pi_i = 0$, или графом $Tank$, если $\pi_i = 1$.

Продемонстрируем строение π-связок на примере двух последовательностей $\pi_1 = \{0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0\}$ и $\pi_2 = \{1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0\}$. Соответствующие связки изображены на рисунках 5.4 и 5.5.

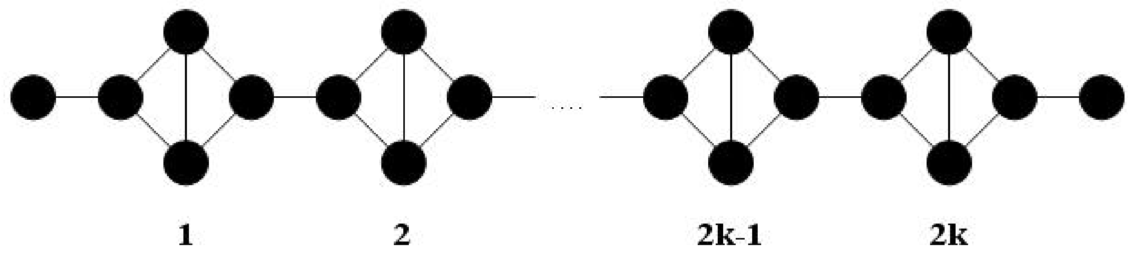

Рис. 5.4: π_1-связка

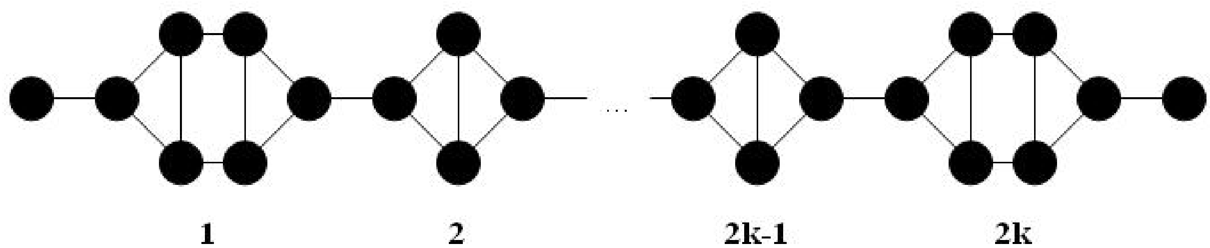

Рис. 5.5: π_2-связка

π_E-преобразованием графа G является операция замены каждого ребра этого графа π-связкой. Обозначим через G_{π_E} граф, получаемый π_E-преобразованием из графа G. Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 19. *Для любой конечной бинарной последовательности π граф G_{π_E} является реберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G является реберно 3-раскрашиваемым.*

Введем понятие *$\triangle$-преобразования вершины*. Пусть окрестность вершины x некоторого графа состоит в точности из трех попарно несмежных вершин y_1, y_2, y_3. Применение $\triangle$-преобразования к вершине x состоит в том, что:

1. Вершина x заменяется на три попарно смежные вершины x_1, x_2 и x_3.

2. Добавляются ребра $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Пусть G — произвольный граф класса $\mathbf{Deg}(3)$. *$\triangle$-преобразование графа G* состоит в последовательном применении $\triangle$-преобразования к вершинам, окрестность которых порождает подграф $\overline{K}_3$. Ясно, что граф, полученный в результате $\triangle$-преобразования графа G, определяется однозначно. Обозначим этот граф через $(G)_\triangle$. Через $(\mathbf{X})_\triangle$ обозначим множество графов, получаемых в результате применения $\triangle$-преобразования к графам из $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Deg}(3)$.

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 20. *Граф $G \in \mathbf{Deg}(3)$ является реберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $(G)_\triangle$.*

Через $\mathbf{Z}_\pi$ обозначим множество графов, получаемых применением π_E-преобразования к графам класса $\mathbf{Deg}(3)$. Через $T_\pi^{'}$ будем обозначать граф, получаемый применением π_E-преобразования к графу $T_{1,1,1}$. Обозначим через $D_\pi^{'}$ граф $(T_\pi^{'})_\triangle$. Для произвольной бесконечной бинарной последовательности π через $\mathbf{T}_\pi^{'}$ обозначим множество графов, каждая компонента связности которых принадлежит множеству $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{T_{\pi(k)}^{'}\}$, а через $\mathbf{D}_\pi^{'}$ обозначим класс графов $(\mathbf{T}_\pi^{'})_\triangle$.

Лемма 21. *Для любой бесконечной двоичной последовательности π классы $\mathbf{T}_\pi^{'}$ и $\mathbf{D}_\pi^{'}$ являются 3-РР-предельными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что класс $\mathbf{Deg}(3) \cap Free(\{C_3\})$ является 3-РР-сложным [35]. Отсюда и из леммы 20 следует, что для любого k наследственное замыкание класса $\mathbf{Z}_{\pi(k)}$ является 3-РР-сложным классом. Таким образом, при любом k класс $\mathbf{X}_k$ — объединение по j от k до ∞ наследственных замыканий $\mathbf{Z}_{\pi(j)}$ является 3-РР-сложным. По аналогии с соответствующими рассуждениями леммы 13 можно показать справедливость равенства $\mathbf{T}_\pi^{'} = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}_j$. Отсюда следует, что класс $\mathbf{T}_\pi^{'}$ — 3-РР-предельный.

Из проделанных рассуждений и леммы 19 следует, что при любом k класс $\mathbf{Y}_k$ — результат применения $\triangle$-преобразования к наследственному замыканию класса $\mathbf{Z}_{\pi(k)}$ является 3-РР-сложным. Поэтому для произвольного k класс $\mathbf{X}_k^{'} = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} \mathbf{Y}_j$ также является 3-РР-сложным. 3-РР-предельность класса $\mathbf{D}_\pi^{'}$

следует из равенства $\mathbf{D}'_\pi = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{X}'_j$, доказательство которого аналогично доказательству соответствующего равенства из предыдущего абзаца. Лемма 21 доказана.

Вершину x некоторого графа G назовем 3-РР-*аннигилируемой*, если выполняется одно из следующих условий:

- $deg(x) \leq 1$;
- $deg(x) = 2$ и существует такая вершина y графа G, что $deg(y) \leq 2$ и $(x, y) \in E(G)$;
- $deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порожденному подграфу $Diamond$ графа G;
- $deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порожденному подграфу $Tank$ графа G.

Пусть $\mathbf{X}$ — наследственный класс графов. Через $\mathbf{X}^a$ обозначим множество графов класса $\mathbf{X} \cap \mathbf{Deg}(3)$, не содержащих 3-РР-аннигилируемых вершин.

Лемма 22. *Если класс* $\mathbf{X}$ *является* 3-РР-*сложным, то наследственное замыкание класса* $\mathbf{X}^a$ *тоже является* 3-РР-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что ни один из графов класса $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Deg}(3)$ не является реберно 3-раскрашиваемым. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 14. Лемма 22 доказана.

Лемма 23. *Пусть* $\mathbf{B}$ — 3-РР-*граничный класс и граф* $G_1 \in \mathbf{B}$ *содержит* 3-РР-*аннигилируемую вершину* x. *Тогда существует такой граф* $G_2 \in \mathbf{B}$, *что* G_1 *является порожденным подграфом графа* G_2, *а вершина* x *в графе* G_2 *не является* 3-РР-*аннигилируемой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. $\mathbf{B}$ — 3-РР-граничный класс, то существуют такие 3-РР-сложные классы $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i = \mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{B}_i^{'}$ — наследственное замыкание класса $\mathbf{B}_i^a$. Аналогично соответствующим рассуждениям леммы 15 можно показать, что $\mathbf{B}^{'} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i^{'} = \mathbf{B}$.

Пусть G_1 — такой граф класса $\mathbf{B}$, что в нем существует 3-РР-аннигилируемая вершина x. Тогда $G_1 \in \mathbf{B}_1^{'}$, $G_1 \in \mathbf{B}_2^{'}$, ... По построению класса $\mathbf{B}_i^{'}$ для любого i существует такой граф $G_i^{'} \in \mathbf{B}_i^{'}$, что G_1 порожден в $G_i^{'}$ и вершина x в $G_i^{'}$ не является 3-РР-аннигилируемой. Рассмотрим следующие возможные случаи:

1. В графе $G_i^{'}$ вершина x имеет степень, равную 3. Тогда рассмотрим граф $G_i^{''}$, получаемый из $G_i^{'}$ удалением всех вершин, не принадлежащих G_1 и отстоящих от x на расстоянии не менее чем 2. Понятно, что вершина x в графе $G_i^{''}$ не является 3-РР-аннигилируемой и что $|V(G_i^{''})| - |V(G_1)| \leq 3$.

2. В графе $G_i^{'}$ вершина x имеет степень, равную 2. Поскольку вершина x в графе $G_i^{'}$ не является 3-РР-аннигилируемой, то x не принадлежит ни одному порожденному подграфу $K_4 - e$ графа $G_i^{'}$. Рассмотрим граф $G_i^{''}$, получаемый из $G_i^{'}$ удалением всех вершин, не принадлежащих G_1 и отстоящих от x на расстоянии не менее чем 3. Легко проверить, что вершина x в графе $G_i^{''}$ не является 3-РР-аннигилируемой и что $|V(G_i^{''})| - |V(G_1)| < 7$.

Таким образом, для любого i существует такой граф $G_2^i \in \mathbf{B}_i^{'}$, что G_1 порожден в G_2^i, $|V(G_2^i)| - |V(G_1)| < 7$ и вершина x в G_2^i не является 3-РР-аннигилируемой. Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с леммой 15. Лемма 23 доказана.

Лемма 24. *Любой* 3-РР-*граничный класс содержит либо класс* $\mathbf{T}$, *либо класс* $\mathbf{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$ — произвольная сходящаяся к 3-РР-граничному класу $\mathbf{B}$ последовательность из 3-РР-сложных классов графов. Поскольку ни один из графов класса

$\mathbf{Deg}(4) \setminus \mathbf{Deg}(3)$ заведомо не является реберно k-раскрашиваемым, то можно считать, что при любом i выполняется включение $\mathbf{B}_i \subseteq \mathbf{Deg}(3)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям леммы 16 и используют тот факт, что для любых заданных чисел d и t класс $\{G|\ tw(G) \leq t,\ \forall x \in V(G) : deg(x) \leq d\}$ является 3-РР-простым [24]. Лемма 24 доказана.

Доказательство следующих лемм полностью аналогично доказательству леммы 18 и использует утверждение леммы 23.

Лемма 25. *Пусть для некоторой бесконечной двоичной последовательности* π *и некоторого* 3-РР-*граничного класса* $\mathbf{B}$ *выполняется включение* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T}'_{\pi}$, *причем для некоторого* k *граф* $kT_{1,1,1}$ *принадлежит классу* $\mathbf{B}$. *Тогда наследственное замыкание класса* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kT'_{\pi^{(i)}}\}$ *является подклассом класса* $\mathbf{B}$.

Лемма 26. *Пусть для некоторой бесконечной двоичной последовательности* π *и некоторого* 3-РР-*граничного класса* $\mathbf{B}$ *выполняется включение* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{D}'_{\pi}$, *причем для некоторого* k *граф* $kD_{1,1,1}$ *принадлежит классу* $\mathbf{B}$. *Тогда наследственное замыкание класса* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kD'_{\pi^{(i)}}\}$ *является подклассом класса* $\mathbf{B}$.

Основным результатом этого подраздела является теорема 8.

Теорема 8. *Для произвольной бесконечной двоичной последовательности* π *класс* $\mathbf{T}'_{\pi}$ *и класс* $\mathbf{D}'_{\pi}$ *являются* 3-РР-*граничными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что справедливы включения $\mathbf{T}'_{\pi} \subseteq Free(\{D_{1,1,1}\})$ и $\mathbf{D}'_{\pi} \subseteq Free(\{T_{1,1,1}\})$. Дальнейшее доказательство полностью аналогично рассуждениям теоремы 7 и использует леммы 25 и 26. Теорема 8 доказана.

Ясно, что для различных бесконечных бинарных последовательностей π_1 и π_2 выполняются условия $\mathbf{T}^{'}_{\pi_1} \neq \mathbf{T}^{'}_{\pi_2}$ и $\mathbf{D}^{'}_{\pi_1} \neq \mathbf{D}^{'}_{\pi_2}$. Отсюда и из теоремы 8 следует, что множества $\Phi_2 = \{\mathbf{T}^{'}_{\pi} : \pi$ — бесконечная бинарная последовательность$\}$ и $\Phi_3 = \{\mathbf{D}^{'}_{\pi} : \pi$ — бесконечная бинарная последовательность$\}$ являются континуальными множествами попарно различных 3-PP-граничных классов графов. Поэтому и само множество всех 3-PP-граничных классов континуально.

Вопросы и задачи

1. Привести пример континуального множества задач на графах, для каждой из которых множество граничных классов имеет мощность континуума.

Литература

[1] Алексеев В. Е. О сжимаемых графах // В сб. Проблемы кибернетики, вып. 36, 1979. — Стр. 23–32.

[2] Алексеев В. Е. Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 1999. — Т.6, №4. — Стр. 3–19.

[3] Алексеев В. Е. Исследование количественных и сложностных характеристик наследственных классов графов: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика». — Нижний Новгород, 2002. — 113 Стр.

[4] Алексеев В. Е., Малышев Д. С. Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Том 15, №1. — Стр. 3–10.

[5] Алексеев В. Е., Малышев Д. С. Критерий граничности и его применения // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Том 15, №6. — Стр. 3–11.

[6] Алексеев В. Е., Таланов В. А. Графы. Модели вычислений. Алгоритмы. — Н.Новгород: Из-во Нижегородского университета, 2005. — 308 Стр.

[7] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 Стр.

[8] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 Стр.

[9] Зыков А. А. Основы теории графов. — М.: Наука, 1987. — 383 Стр.

[10] Малышев Д. С. Граничные классы для задачи о независимом множестве в классе планарных графов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Раздел «Математика». — 2007. — №6. — P. 165–168.

[11] Малышев Д. С. Граничные классы относительно класса планарных графов для задачи о независимом множестве // Материалы VI молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16–21 апреля 2007 г.), часть II. — Стр. 16–20.

[12] Малышев Д. С. Граничные классы для задач на графах // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Раздел «Математическое моделирование и оптимальное управление». — 2008. — №6. — P. 141–146.

[13] Малышев Д. С. О бесконечности множества граничных классов в задаче о реберной 3-раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009.— Т.16, №1. — Стр. 37–43.

[14] Малышев Д. С. Граничные классы графов для некоторых задач распознования // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009.— Т.16, №2. — Стр. 85–94.

[15] Малышев Д. С. Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т.16, №5. — Стр. 41–51.

[16] Малышев Д. С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т.16, №6. — Стр. 43–51.

[17] Малышев Д. С. О количестве граничных классов в задаче о 3-раскраске // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, №4. — Стр. 129–134.

[18] Сорочан С. В. Исследование количественных характеристик наследственных классов ориентированных и цветных графов: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика». — Нижний Новгород, 2006. — 149 Стр.

[19] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 Стр.

[20] Alekseev V. E. On easy and hard classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — V. 132. — P. 17–26.

[21] Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V. NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoretical Computer Science. — 2007. — V. — 389. — P. 219–236.

[22] Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V. Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 285. — P. 1–6.

[23] Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Millanic M. The maximum independent set problem in planar graphs // Mathematical Foundations of Computer Science (Torun, 25–29 August 2008). Proc. in Lecture Notes in Computer Science. — V. — 5162. — P. 96–107.

[24] Bodlaender H. L. Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, Languages and Programming (Tampere, 11–15 July 1988). Proc. in Lecture Notes in Computer Science. — 1988. — V. 317. — P. 105–118.

[25] Bondy J., Murty U. Graph theory with applications. — North Holland: — 1979, — 270 P.

[26] Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. The strong perfect graph theorem // Ann. of Math. — 2006. — V. 164. — P. 51–229.

[27] Cobham A. The intrinisic computational difficulty of functions // Proceedings of 1964th international congress for logic methodology and phylosophy of science. — 1964. — P. 24–30.

[28] Corneil D. G., Perl Y., Stewart L. K. A linear recognition algorithm for cographs // SIAM J. Comput. — 1985. — V. 14. — P. 926–934.

[29] Cook S. The complexity of theorem-proving procedures // Proceedings 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing. — 1971. — P.151-158.

[30] Dereniowski D. The complexity of list ranking of trees // Ars Combinatoria. — 2008. — V. 86. — P. 97–114.

[31] D. Dereniowski, M. Kubale. Parallel Query Processing and Edge Ranking of Graphs // PPAM. — 2005. — P. 463–469.

[32] Distel R. Graph theory. — Springer, 2000. — 322 P.

[33] Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canad. J. Math. — 1965. — V. 17. — P. 449–467.

[34] Gallai T. Transitiv orientierbare graphen // Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1967. — V. 18. — P. 25–66.

[35] Holyer I. The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. — 1981. — V. 10, №4. — P. 718–720.

[36] Jamison R.E. Coloring parameters associated with rankings of graphs // Congressus Numerantum. — 2003. — V. 164. — P. 111–127.

[37] Karp R. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. — 1972, — P. 85–103.

[38] Kochol M., Lozin V., Randerath B. The 3-colorability problem on graphs with maximum degree four// SIAM J.Comput. — 2003. — V. 32, №5. — P. 1128–1139.

[39] Ladner R. E. The computational complexity of provability in systems of modal prepositional logic // SIAM J. Comput. — 1977. — V. 6. — P. 467–480.

[40] Liu J.W.H. The role of elimination trees in sparse factorization // SIAM J. Matrix analysis and applications. — 1990. — V.11. — P. 134-172.

[41] Lozin V. V. Boundary classes of planar graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 2008. — V. 17. — P. 287–295.

[42] Lozin V. V., Rautenbach D. On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 18. — P. 195–206.

[43] Lozin V. V., Millanic M. Maximum independent sets in graphs of low degree // Proceedings of the ACM-SIAM symposium on descrete algorithms. — 2007. — P. 874–880.

[44] Makino K., Uno Y., Ibaraki T. Minimum edge ranking spanning trees of threshold graphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2002. — V. 2518. — P. 428–440.

[45] http://ru.wikipedia.org/wiki/Задачи тысячелетия

[46] Robertson N., Seymour P. Graph minors. III. Planar tree-width // J. Combin. Theory, Series B. — 1986. — V. 41. — P. 92–114.

Дмитрий Сергеевич **Малышев**

КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ГРАНИЦЫ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ В СЕМЕЙСТВЕ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01