

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.В. Жидков
Н.В. Леонтьев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Часть 2 Применение ANSYS

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по специальности 01.05.01
«Фундаментальная математика и механика», направлениям подготовки
01.04.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород
2020

УДК 539.3
ББК 22.251
Ж69

Ж69 Жидков А.В., Леонтьев Н.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ. Ч. 2. ПРИМЕНЕНИЕ ANSYS: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 32 с.

Рецензент: к.т.н., доцент **Е.А. Никитина**

В учебно-методическом пособии приводятся основные сведения по численному решению нелинейных задач для гиперупругих материалов методом конечных элементов в пакете ANSYS. В качестве примеров рассмотрены задачи растяжения пластины и обжатия арочного амортизатора из эластомеров Муни-Ривлина и нео-Гука. Содержание работы направлено на совершенствование профессиональной подготовки студентов института информационных технологий, математики и механики, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования в механике деформируемого твёрдого тела.

УДК 539.3
ББК 22.251

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ В ANSYS.....	4
МОДЕЛИ ГИПЕРУПРУГИХ СРЕД В ANSYS	5
Модель неогукова материала.....	5
Модель материала Муни-Ривлина.....	5
КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ГИПЕРУПРУГИХ СРЕД В ANSYS	7
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ANSYS.....	9
Растяжение пластины из гиперупругого материала	9
Нормальная сжимаемость материала	9
Задание	9
Слабая сжимаемость материала.....	11
Задания	13
Обжатие арочного амортизатора	13
Нормальная сжимаемость материала	14
Задание	15
Слабая сжимаемость материала.....	15
Задания	17
Раздувание квадратной мембраны равномерным давлением	17
Нормальная сжимаемость материала	17
Задания	19
Слабая сжимаемость материала.....	19
Задания	20
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	21
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	22
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	24
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ 4.....	30

ВВЕДЕНИЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ В ANSYS.

Пакет прикладных программ ANSYS является универсальным средством решения широкого класса задач механики и математической физики. В том числе, ANSYS содержит в своем составе эффективные средства решения задач деформирования гиперупругих материалов при различных нагрузках и режимах нагружения. Нелинейная механика гиперупругих сред компактно и достаточно подробно изложена в первой части данного пособия [1]. Характерными особенностями деформирования гиперупругих материалов являются, во-первых, большие деформации и, во-вторых – несжимаемость или почти несжимаемость этих материалов. Напомним, что при больших перемещениях и деформациях исходная конфигурация тела не совпадает с конечной, деформированной конфигурацией, как это принято в линейной механике, где перемещения и деформации считаются малыми по сравнению с единицей. Для описания нелинейного деформирования используются специальные представления тензоров напряжений и деформаций [2]. Нелинейная связь перемещений и деформаций, а также то, что конечная деформированная конфигурация является изначально неизвестной, делает задачу деформирования нелинейной. Несжимаемость означает вовсе не то, что гиперупругое тело нельзя деформировать, а то, что в процессе деформирования не изменяется его объем, что также накладывает свои особенности.

Какие же эффективные инструменты для решения задач гиперупругости имеются в ANSYS? Это *модели* гиперупругих материалов, *конечные элементы*, предназначенные для расчета несжимаемых или почти несжимаемых тел при больших перемещениях и деформациях и, наконец, эффективные *алгоритмы*, позволяющие решать задачи для различных случаев нагружения. Рассмотрим подробнее некоторые из представленных в ANSYS моделей гиперупругих сред и конечных элементов.

МОДЕЛИ ГИПЕРУПРУГИХ СРЕД В ANSYS

В ANSYS представлены следующие модели изотропных гиперупругих сред [3]:

- модель неогукера материала;
- модель Муни-Ривлина;
- полиномиальная модель;
- модель Огдена;
- модель Арруды-Бойса;
- модель Гента;
- модель Йо.

Кроме того, существуют анизотропные модели, есть возможность создавать пользовательские модели. Из всего многообразия мы рассмотрим неогукеру модель и модель Муни-Ривлина. Приведем краткие сведения об этих моделях. Более подробная информация содержится в первой части пособия [1].

Модель неогукера материала

Упругий потенциал неогукера материала имеет вид:

$$W = \frac{G}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2$$

W – потенциал энергии деформаций;

\bar{I}_1 – первый инвариант изохорического тензора деформаций Грина;

G – модуль сдвига;

d – материальный параметр несжимаемости, связанный с начальным объемным модулем $K = \frac{2}{d}$;

Модель материала Муни-Ривлина

Упругий потенциал двухконстантного материала Муни-Ривлина имеет вид:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2$$

W – потенциал энергии деформаций;

\bar{I}_1, \bar{I}_2 – первый и второй инварианты изохорического тензора деформаций Грина;

C_{10}, C_{01} – материальные константы материала;

d – материальный параметр несжимаемости;

Начальные значения объемного модуля и модуля сдвига связаны с константами материала следующим образом:

$$K = \frac{2}{d}; \quad G = 2(C_{10} + C_{01}).$$

Как видно, модель неогука сводится к модели Муни-Ривлина при $C_{01} = 0$.

Часть потенциала с коэффициентами C_{10}, C_{01} определяют девиаторную часть деформаций и напряжений, а последнее слагаемое – шаровую часть. При нулевом значении d модель определяет несжимаемую среду. Ненулевые значения этого параметра соответствуют различной степени сжимаемости.

Чтобы представить, как ведут себя гиперупругие материалы при одноосном растяжении, был проведен численный эксперимент. Был зафиксирован начальный модуль сдвига $G = 1$ МПа. При этом значения коэффициентов C_{10}, C_{01} выбирались так, чтобы их сумма равнялась 0.5 МПа. На рис. 1-2 показаны графики зависимости истинного напряжения Коши σ_1 от удлинения λ_1 при одноосном растяжении при значениях объемного модуля $K = 2$ МПа и $K = 100$ МПа.

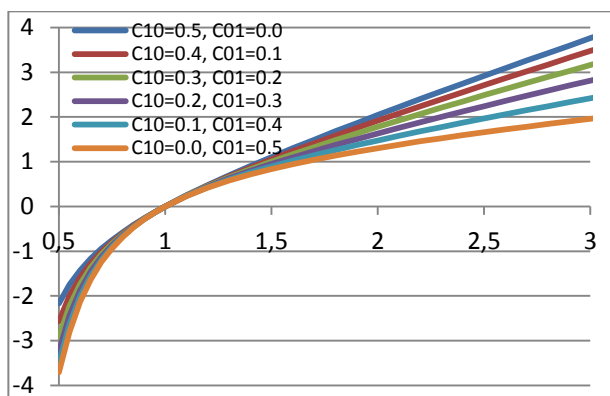


Рис. 1. Зависимость напряжения Коши σ_1 от удлинения λ_1 при $K = 2$.

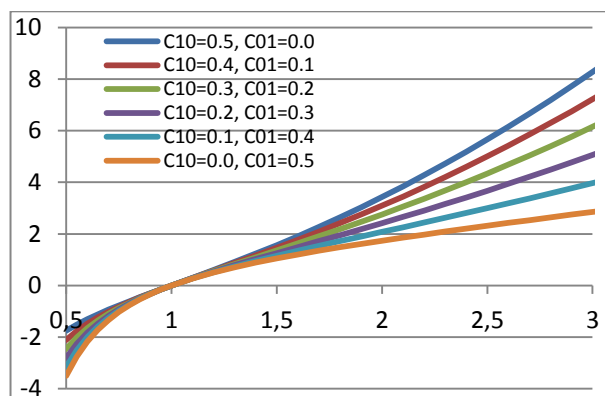


Рис. 2. Зависимость напряжения Коши σ_1 от удлинения λ_1 при $K = 100$.

Увеличение коэффициента C_{10} при постоянном значении модуля сдвига приводит к увеличению абсолютной величины напряжения σ_1 при растяжении и уменьшению его при сжатии. Увеличение начального значения объемного модуля приводит к увеличению напряжения σ_1 при растяжении. Еще можно отметить, что при рассмотренных изменениях кривые не пересекаются в точке с координатами $(1, 0)$, а касаются друг друга.

КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ГИПЕРУПРУГИХ СРЕД В ANSYS

Целый ряд конечных элементов, предназначенных для аппроксимации тел различной мерности, может работать с моделями гиперупругих сред. Список этих элементов показан в таблице 1.

Таблица 1.
Основные конечные элементы для расчета гиперупругих сред

Расчетные схемы	Конечные элементы
Пластины и оболочки	SHELL181, SHELL281, SOLSH190
Двумерные задачи	PLANE182, PLANE183
Трехмерные задачи	SOLID185, SOLID186, SOLID187

Далее мы рассмотрим, в основном, использование только конечных элементов для расчета трехмерных тел, а именно SOLID185. Использование других типов элементов студенты могут рассмотреть самостоятельно.

Элемент SOLID185 представляет собой криволинейный гексаэдр (шестигранник) с 8-ю узлами, при построении которого используется изопараметрическая технология [4]. Известно, что такие элементы обладают существенными недостатками, такими как сдвиговое и объемное запираение или заклинивание. Эффект запираения состоит в том, что жесткость элемента при некоторых видах деформирования может необоснованно возрастать. Так, сдвиговое запираение возникает в задачах, где основным деформированным состоянием является изгиб. Объемное запираение появляется в задачах для материалов, близких к несжимаемым. Причина этих эффектов заключается в использовании в качестве функций формы неполных полиномов. Разработаны различные подходы [4, 5, 6] для преодоления этих негативных явлений.

В ANSYS также присутствуют средства, позволяющие преодолеть негативные эффекты запираения. В Руководстве [3] они называются «*current technologies* – современные технологии». Для элемента SOLID185 доступны следующие возможности.

Метод ***B***-bar ($\bar{\mathbf{B}}$ или «***B*** с чертой») представляет собой выборочное сокращенное интегрирование. При его использовании объемная деформация аппроксимируется полиномом степени на единицу меньше, чем степень полинома для аппроксимации деформаций. Если для деформаций используется полином первой степени, то для объемной деформации – нулевой. Распределение объемной деформации просто заменяется ее средним значением. Отсюда и название – черта означает осреднение по объему элемента, а буквой «***B***» традиционно обозначают матрицу связи деформаций и перемещений. При построении элемента применяется полное интегрирование. Этот метод включен «по умолчанию».

Метод **B**-bar помогает предотвратить объемное заклипание для почти несжимаемых материалов, но не может предотвратить сдвиговое заклипание в задачах с преобладанием изгиба.

В задачах с преобладанием изгиба может оказаться полезной еще одна технология элемента SOLID185 – улучшенное представление деформаций (*enhanced strain formulation*). Метод состоит во введении внутренних степеней свободы для преодоления сдвигового и объемного заклипаний. Добавление и обработка внутренних неизвестных происходит автоматически без участия пользователя. Этот метод предотвращает сдвиговое заклипание в задачах с преобладанием изгиба и объемное заклипание в случаях с почти несжимаемыми материалами.

Выбор технологии построения конечного элемента осуществляется с помощью ключевой опции **KEYOPT(2)**. Значение 0 соответствует полной схеме интегрирования с **B**-bar методом, а значение 2 – методу улучшенного представления деформаций.

Все сказанное выше относилось к элементам, построенным на основе принципа Лагранжа, которые в меню обозначаются как «*Pure displacement*». Кроме этого, в ANSYS имеется возможность использовать элементы на основе так называемой смешанной *u-P* формулировке – варианте принципа Рейснера («*Mixed u-P*»). В этом случае в элементах возникают новые неизвестные – значения гидростатического (или среднего) давления. Мы не будем здесь рассматривать теоретические основы смешанной формулировки. Желающие могут самостоятельно изучить это вопрос по источникам [5,6]. Элементы на основе смешанной *u-P* формулировки можно применять как к расчету почти несжимаемых материалов, так и к расчету полностью несжимаемых материалов.

Использование смешанных (еще говорят – гибридных) конечных элементов осуществляется с помощью ключевой опции **KEYOPT(6)=1**. Все отмеченные выше современные технологии, применимые к элементам «*Pure displacement*», применимы также и к элементам «*Mixed u-P*».

При выборе конечного элемента для расчетов можно следовать следующему правилу.

- Для материалов с **умеренной сжимаемостью** рекомендуется использовать элементы «*Pure displacement*» с применением современных технологий; при возникновении затруднений в сходимости переходить к смешанным элементам на основе *u-P* формулировки.
- Для материалов с **очень слабой сжимаемостью** или **полностью несжимаемых** рекомендуется использовать элементы по современной технологии на основе смешанной *u-P* формулировки или SOLID285.

В следующем разделе рассмотрены примеры решения задач для гиперупругих материалов ANSYS.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ANSYS

Растяжение пластины из гиперупругого материала

Нормальная сжимаемость материала

Рассмотрим следующую задачу о жёстком растяжении квадратной пластины в условиях плоской деформации. Размеры пластины: $20 \times 20 \times 2$ мм. По вертикальным боковым граням заданы перемещения 20 мм. Свойства материала пластины: модуль сдвига $G = 1$ МПа, модуль объёмного сжатия $K = 2$ МПа.

Задача трёхмерная, пластина имеет три плоскости симметрии, поэтому при решении рассматривается 1/8 часть полосы с заданием соответствующих условий симметрии. Задача решается на сетке $16 \times 16 \times 1$ конечных элементов.

Сравним решения задачи для двух моделей гиперупругих материалов: модели неогукера материала и двух константной модели материала Муни–Ривлина. Необходимый для задания обеих моделей поведения материала, материальный параметр несжимаемости d определяется соотношением $d = 2/K$ и для рассматриваемой задачи $d = 1 \text{ МПа}^{-1}$. Для двухконстантного материала Муни–Ривлина материальные константы C_{10} , C_{01} возьмём равными $C_{10} = 0.31$, $C_{01} = 0.19$ в соответствии с условием $G = 2(C_{10} + C_{01})$.

Результаты решения задачи для неогукера материала приведены на рис. 3. На рис. 3а – распределение перемещения U_y , на рис. 3б – распределение напряжения σ_x . Пунктиром обозначена недеформированная расчетная область.

Аналогичные результаты решения задачи для материала Муни–Ривлина приведены на рис. 4: на рис. 4а – распределение перемещения U_y , на рис. 4б – распределение напряжения σ_x , пунктиром обозначена недеформированная расчетная область.

Сравнивая полученные решения можно утверждать, что качественно результаты мало отличаются друг от друга. Количественно отклонение решений друг от друга по перемещениям составляет 0.03717 мм, по напряжениям – 0.19817 МПа.

Качественное совпадение результатов обусловлено достаточно большой сжимаемостью гиперупругого материала для обеих моделей поведения (и неогукера, и Муни–Ривлина): константы материалов соответствуют коэффициенту Пуассона $\nu = (3K - 2G)/(2(3K + G)) \approx 0,28571$.

Задание

Попробуйте повторить решение задачи самостоятельно. Это не должно занять много времени. Командный файл для решения задачи приведен в приложении 1.

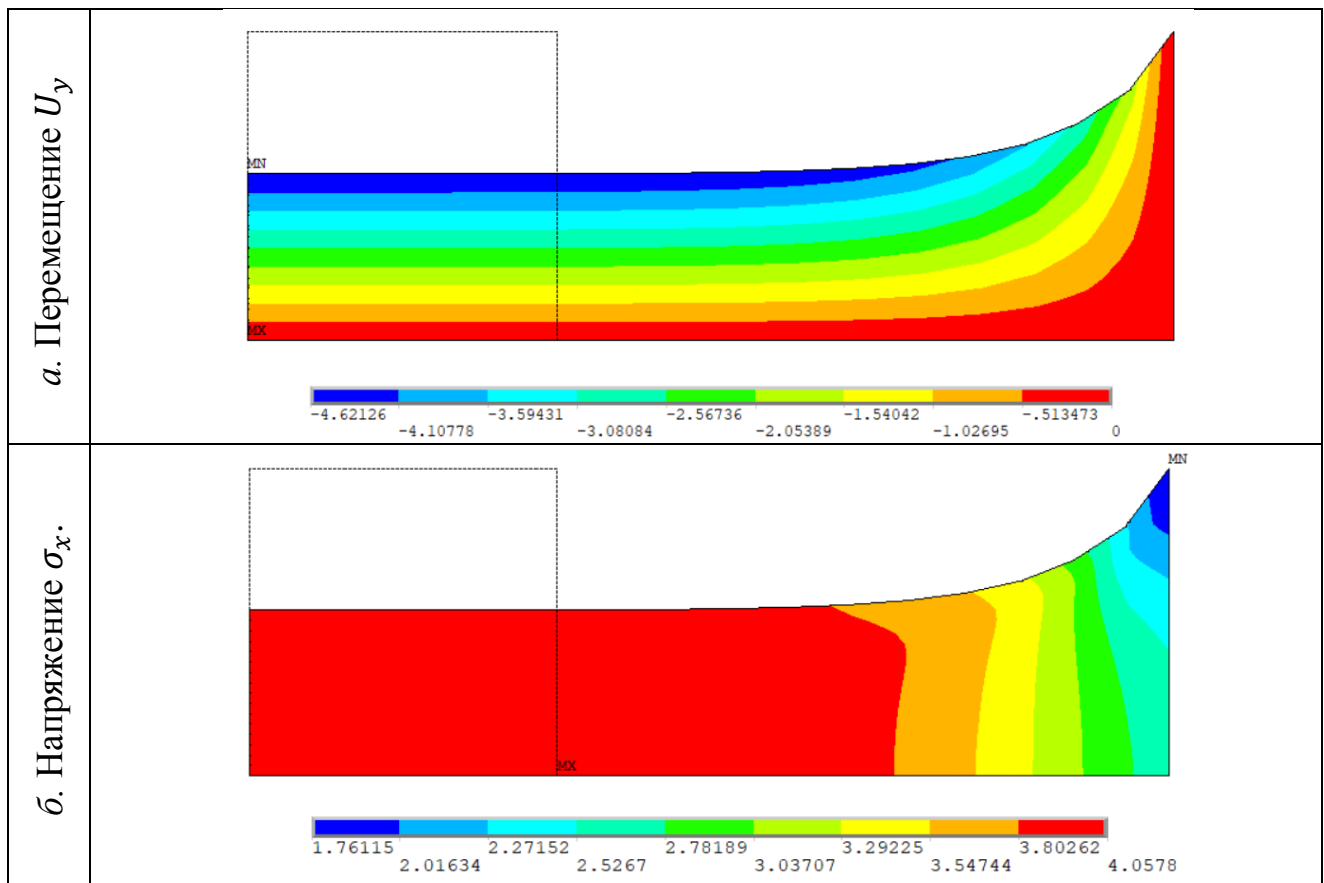


Рис. 3. Материал неогук

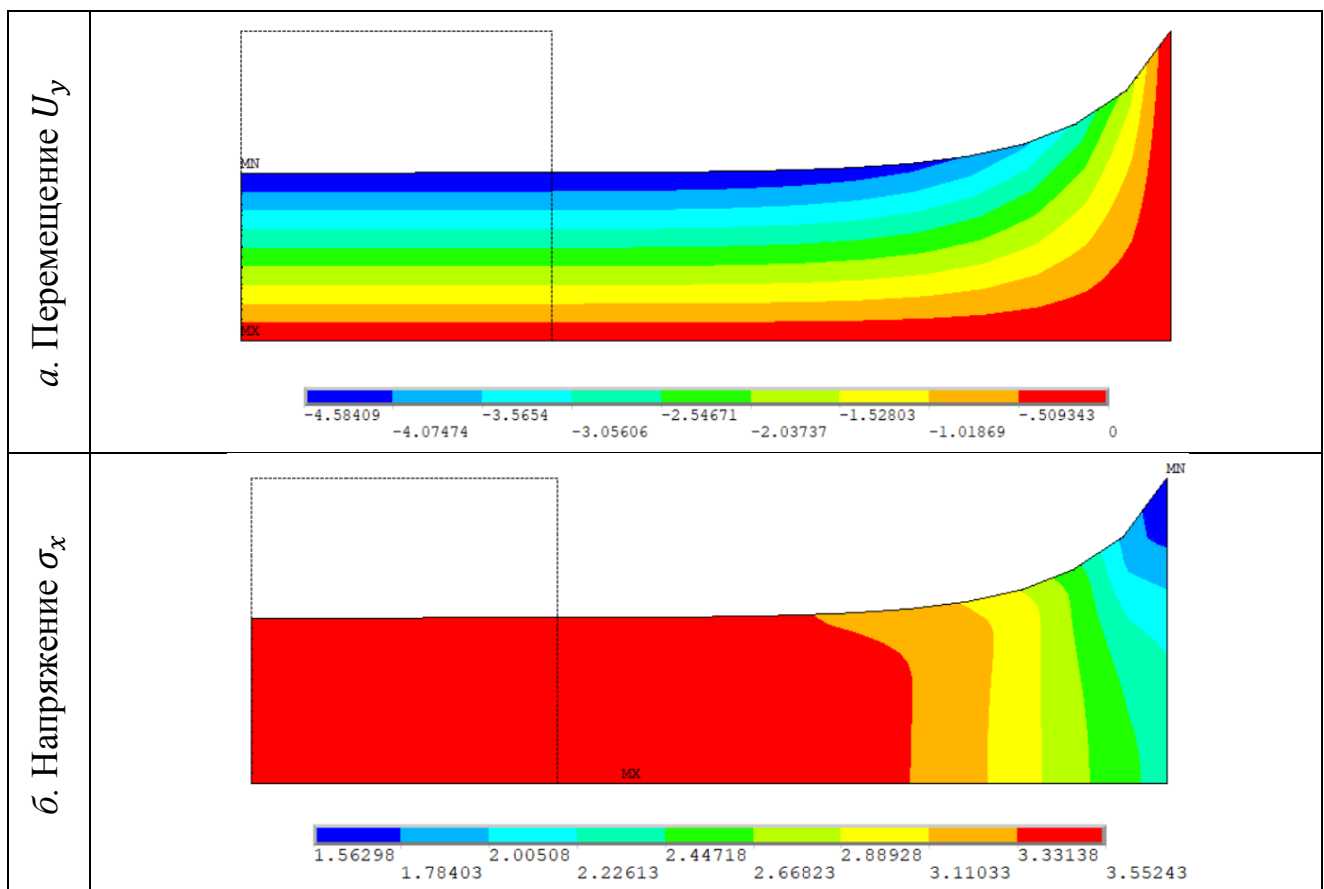


Рис. 4. Материал Муни-Ривлина

Слабая сжимаемость материала

Рассмотрим ту же задачу о жёстком растяжении квадратной пластины, но в условиях плоского напряжённого состояния и со свойствами материала Муни–Ривлина (2-х константная модель) использованными в работе [7]: $C_{10} = 0.36$ МПа, $C_{01} = 0.22$ МПа и $K = 2000$ МПа ($d = 0.001$ МПа⁻¹). Эти данные соответствуют начальному значению модуля сдвига $G = 1.16$ МПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0.49971$.

Аналогично предыдущему, трёхмерная задача имеет три плоскости симметрии, поэтому рассматривается 1/8 часть пластины с заданием соответствующих условий симметрии. Задача решается на сетке $16 \times 16 \times 1$ конечных элементов.

Результаты решения задачи приведены на рис. 5. На рис. 5а – распределение перемещения U_y , на рис. 5б – распределение напряжения σ_x . Пунктиром обозначена недеформированная расчетная область.

Сравним полученное решение с решением, в котором использована модель неогукера материала. Для этого модуль сдвига зададим равным удвоенной сумме параметров Муни–Ривлина. Остальные условия оставим без изменений. Аналогичные результаты решения для неогукерской модели материала показано на рис. 6.

Видно, что решение в этом случае значительно отличается от решения в первом случае. Иная форма свободного края пластины и значение поперечного сужения (3.8 мм против 4.3 мм в первом случае). Если для материала Муни–Ривлина в центре пластины имеем однородное напряжённое состояние, для неогукера материала – неоднородное распределение растягивающих напряжений в центре.

В обоих случаях ANSYS успешно справился с задачей, при этом опция автоматической коррекции величины шага нагружения была включена.

Попробуем решить задачу с использованием смешанных конечных элементов. Исправим для этого в командном файле значение ключевой опции **КЕУОРТ (6) = 1**. Полученное решение практически совпадает с решением, полученным с помощью элементов, построенных на основе принципа Лагранжа. Отличие для материала Муни–Ривлина по напряжениям будет в четвертом знаке после запятой, по перемещениям – в пятом. Но разница в решениях все же есть. При решении с помощью элементов в перемещениях начальное значение величины шага 0.1 для успешного начала вычислений было уменьшено до величины 0.01575, то есть в 6.35 раз; на первом шаге потребовалось 10 итераций метода Ньютона. Всего решение было получено за 38 шагов по нагрузке, а общее количество итераций метода Ньютона равняется 134. При решении с использованием смешанных элементов начальное значение шага по нагрузке осталось неизменным, решение на первом шаге получено за три итерации, всего потребовалось 6 шагов и 13 итераций по равновесию. Если считать затраты на одну итерацию примерно одинаковыми, решение с использованием смешан-

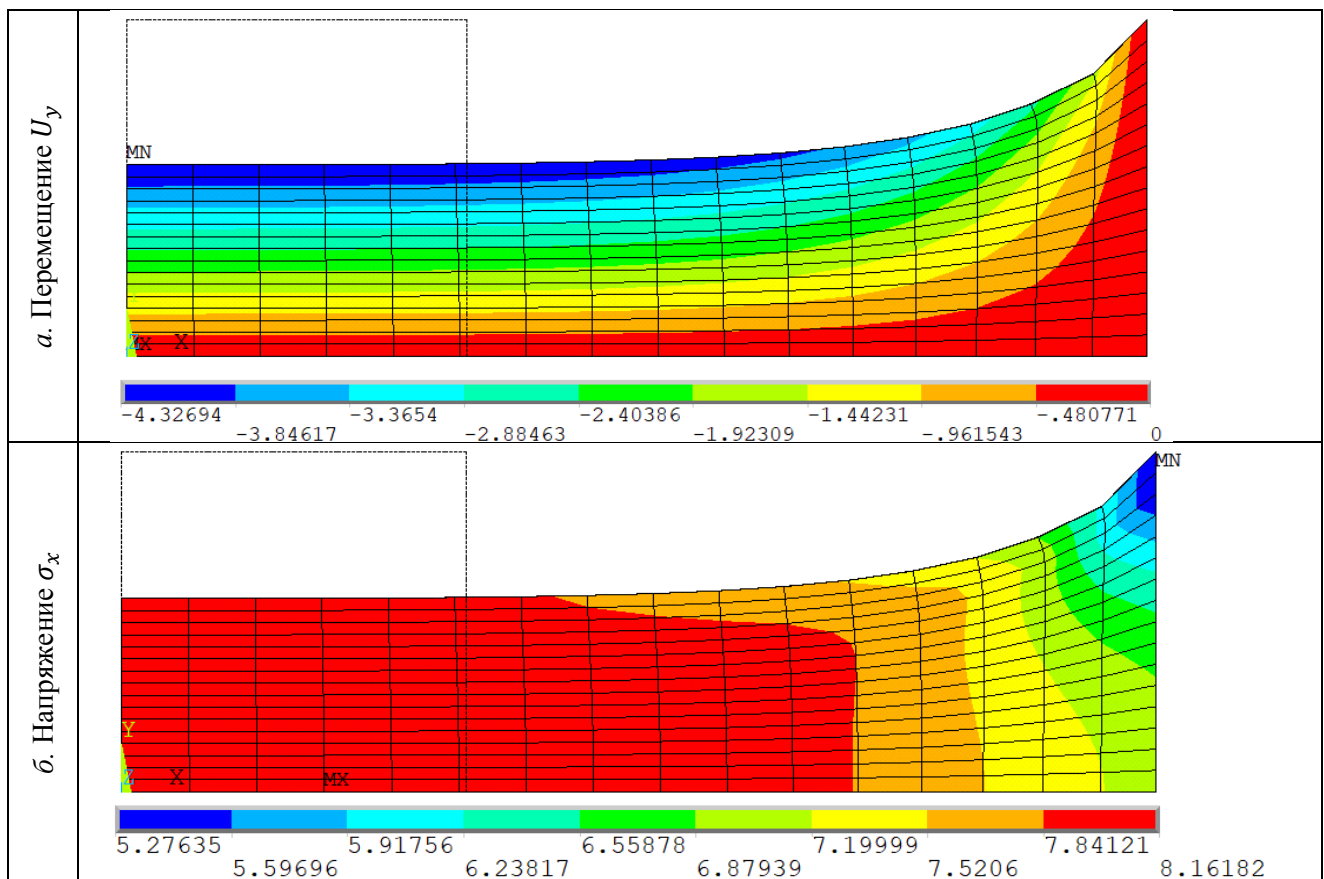


Рис. 5. Материал Муни–Ривлина

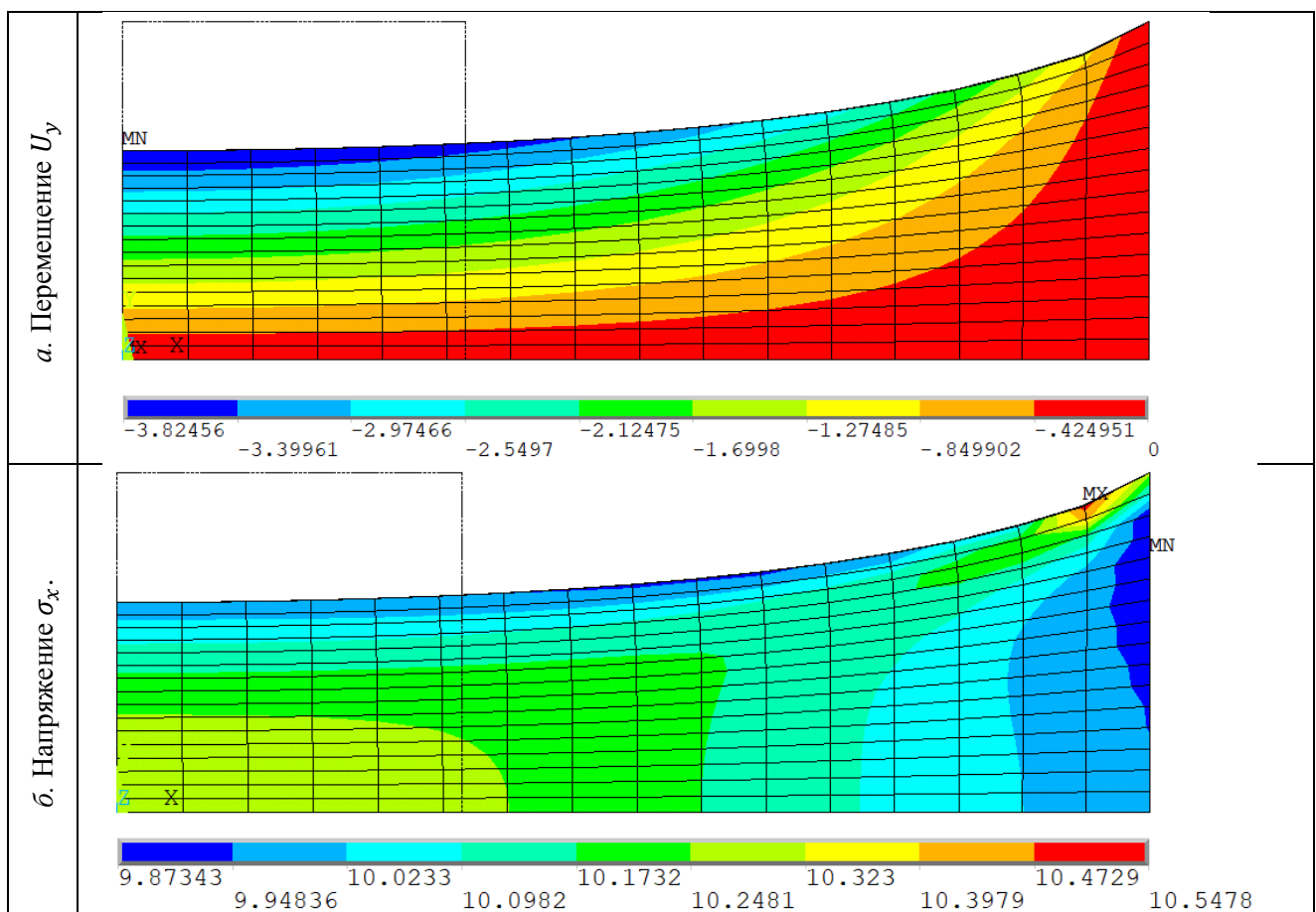


Рис. 6. Материал неогукка

ных элементов оказывается в 10 раз экономичнее решения с использованием элементов на основе принципа Лагранжа. Однако, нужно отметить, что в данном случае мы используем материал со слабой сжимаемостью.

Задания

Выполните расчеты растяжения пластины для различных соотношений коэффициентов C_{10}, C_{01} при условии сохранения начального значения модуля сдвига. Постройте графики зависимости формы свободного края. Постройте графики распределения нормальных напряжений на оси симметрии. Определите, зависит ли скорость сходимости от соотношения констант материала.

Определите предельное удлинение пластины, для которого выполняется сходимость решения при использовании элементов различного типа.

Самостоятельно постройте модель пластины с центральным круговым отверстием. Выясните зависимость свободного края и формы отверстия от соотношения констант материала.

Обжатие арочного амортизатора

Существует большое количество технических областей, где используются различные опоры, подушки, амортизаторы из гиперупругих материалов. Одно из таких устройств – арочный амортизатор [8], изображенный на рис. 5а.

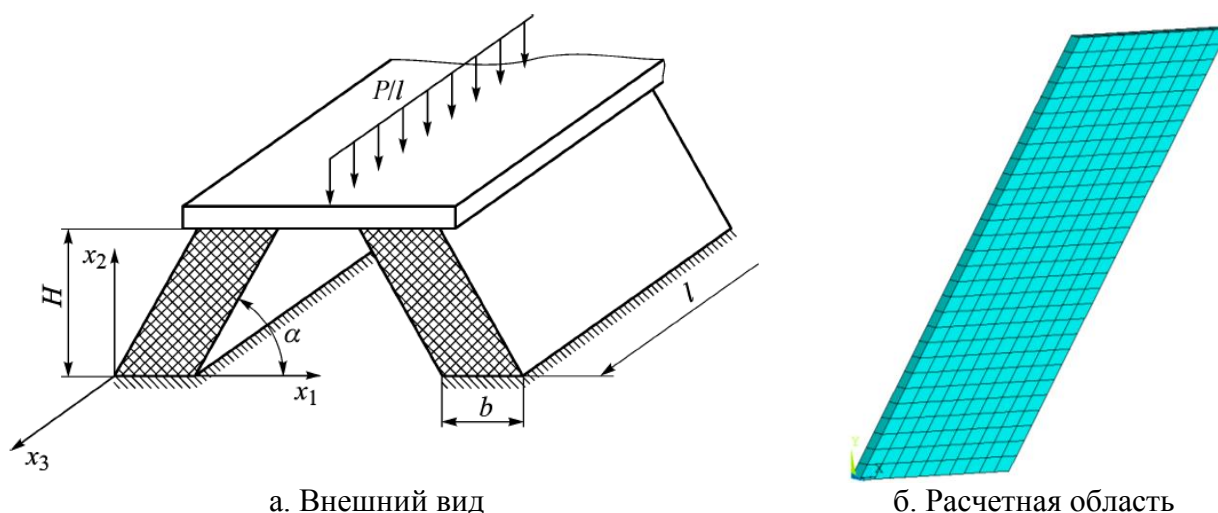


Рис. 5. Арочный амортизатор

Хотя на рис. 5а показано, что амортизатор нагружен погонной силой, мы будем прикладывать заданные перемещения. Во-первых, мы не знаем диапазон рабочих нагрузок этого элемента. Во-вторых, именно кинематическая нагрузка позволит выяснить некоторые его интересные свойства. Основным размером, определяющим геометрию амортизатора, являются высота H , ширина основания b и угол α . Ширина основания b определяется как доля H . Также через H определяется и максимальная величина обжатия δ . Верхние и нижние горизонтальные опоры жестко приклеены или приварены к металлическим частям, поэтому их можно считать либо жестко закрепленными, либо движущимися как жесткое целое. Амортизатор имеет плоскость симметрии. В первом приближе-

нии можно считать, что выполняются условия плоской деформации. Поскольку мы планируем для решения 3D конечный элемент, создадим геометрическую модель толщиной в «один конечный элемент». В итоге получим расчетную модель, как показано на рис. 5б. Обсудим задание граничных условий. На лицевой и обратной ей поверхностях зададим условия симметрии. Они обеспечат выполнение условий плоской деформации. Нижнее основание жестко закреплено. На верхнем основании также можно задать нулевые перемещения по оси X и отрицательные перемещения по оси Y .

Нормальная сжимаемость материала

Сначала проведём сравнение решений для двух моделей поведения гиперупругого материала: модели неогукера материала и двухконстантной модели материала Муни–Ривлина, – для свойств с модулем сдвига $G = 1$ МПа и модулем объёмного сжатия $K = 2$ МПа (соответствуют коэффициенту Пуассона $\nu \approx 0,28571$). Для двухконстантного материала Муни–Ривлина $C_{10} = 0.31$, $C_{01} = 0.19$ аналогично задаче о жёстком растяжении квадратной пластины.

Результаты решения задачи для неогукера материала приведены на рис. 7. На рис. 7а – распределение перемещения U_y , на рис. 7б – распределение экви-

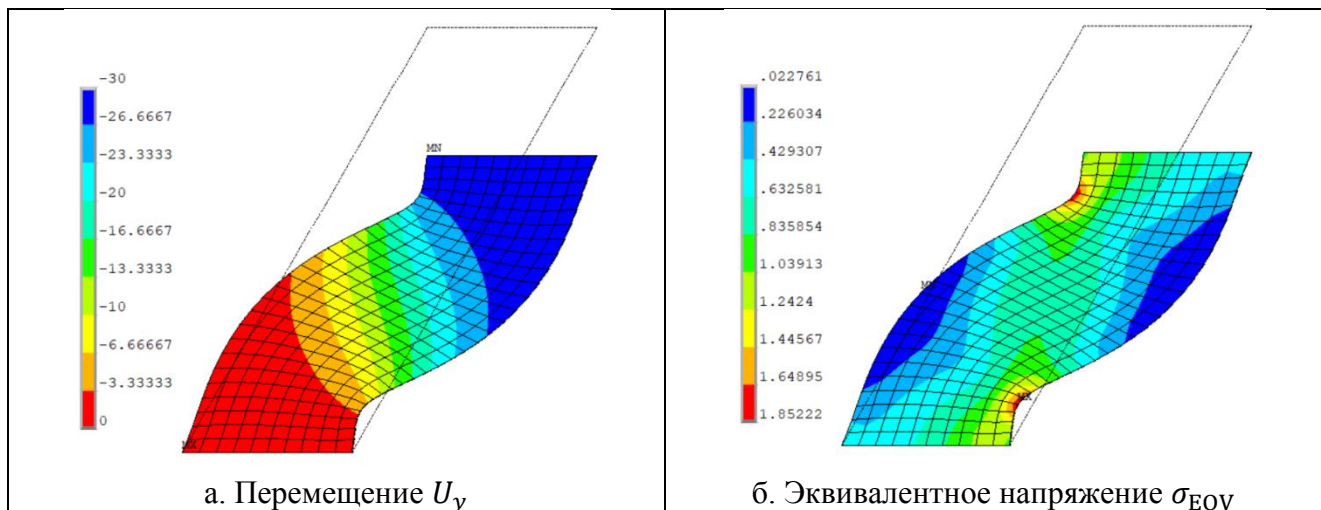


Рис. 7. Материал неогукера

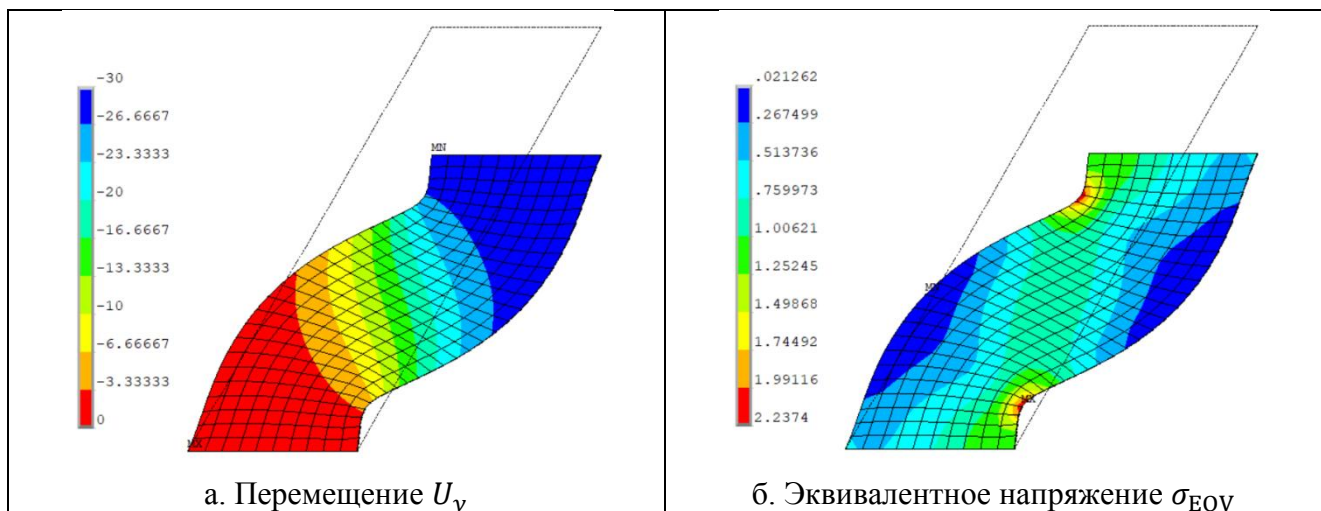


Рис. 8. Материал Муни–Ривлина

валентных по Мизесу напряжений σ_{EQV} . Пунктиром обозначена недеформированная расчетная область. Аналогично на рис. 8 приведены результаты решения задачи для материала Муни–Ривлина: на рис. 8а – распределение перемещения U_y , на рис. 8б – распределение эквивалентных по Мизесу напряжений σ_{EQV} .

Сравнивая полученные решения можно утверждать, что качественно результаты мало отличаются друг от друга, количественное различие довольно существенное: отклонение решений друг от друга по эквивалентному по Мизесу напряжению – 0.38518 МПа. Выбор модели гиперупругого материала существенно влияет на результаты поведения конструкции.

Задание

Попробуйте повторить решение задачи самостоятельно. Это не очень сложно: командный файл для решения задачи, которым можно воспользоваться, приведен в приложении 2.

Слабая сжимаемость материала

На основе решения задачи обжатия амортизатора желательно получить упругую характеристику амортизатора – кривую, связывающую силу реакции с величиной вертикального смещения. Такая зависимость будет весьма полезна при проектировании конструкций и устройств с использованием данного амортизатора. Получить величину перемещения верхней границы как функцию «времени» не составит труда с использованием временного постпроцессора *Time-History Postprocessor (POST26)*. Равнодействующую силу реакции можно вычислить как сумму узловых реакций в узлах верхней границы. Чтобы автоматизировать вычисление равнодействующей, можно применить простой прием. В ANSYS имеется возможность задавать уравнения связи на узловые неизвестные. В частности, с помощью команды **CP** можно задать условие, что все неизвестные (узловые перемещения) заданного набора узлов имеют одинаковые значения. Если нужно задать это значение, это можно сделать, задав его в узле, имеющем минимальный в этом наборе номер. Тогда реакция в этом узле будет равна равнодействующей реакций всех узлов этого набора. Получить номер минимального в наборе узла можно с помощью команды ***GET**. Информацию по командам можно получить в [3].

Свойства материала будем использовать те же, что и в примере о растяжении квадратной пластины при слабой сжимаемости материала Муни–Ривлина. Используем конечные элементы на основе смешанной формулировки. Командный файл решения задачи приведен в приложении 2.

Приведем результаты решения задачи: на рис. 9 показаны эквивалентные напряжения по Мизесу при статическом обжатии арочного амортизатора с материалом Муни–Ривлина при условии плоской деформации в различные моменты времени. На рис. 9а показано начало процесса. Боковые стороны сечения амортизатора практически прямые, но уже видны зоны, в которых концентрируются напряжения, на противоположных сторонах стенки возникают зоны разгрузки. По мере развития процесса обжатия (рис. 9б) стороны сечения при-

обретают характерную обратную S-образную форму. Зоны концентрации и разгрузки так же присутствуют. Изображение на рис. 9в соответствует моменту, когда реактивная сила (рис. 10), возникающая при обжатии, максимальна. На последнем рисунке (рис. 9г) амортизатор уже практически сложился, реактивная сила уменьшается, скоро начнется контактное взаимодействие стенок самих с собой.

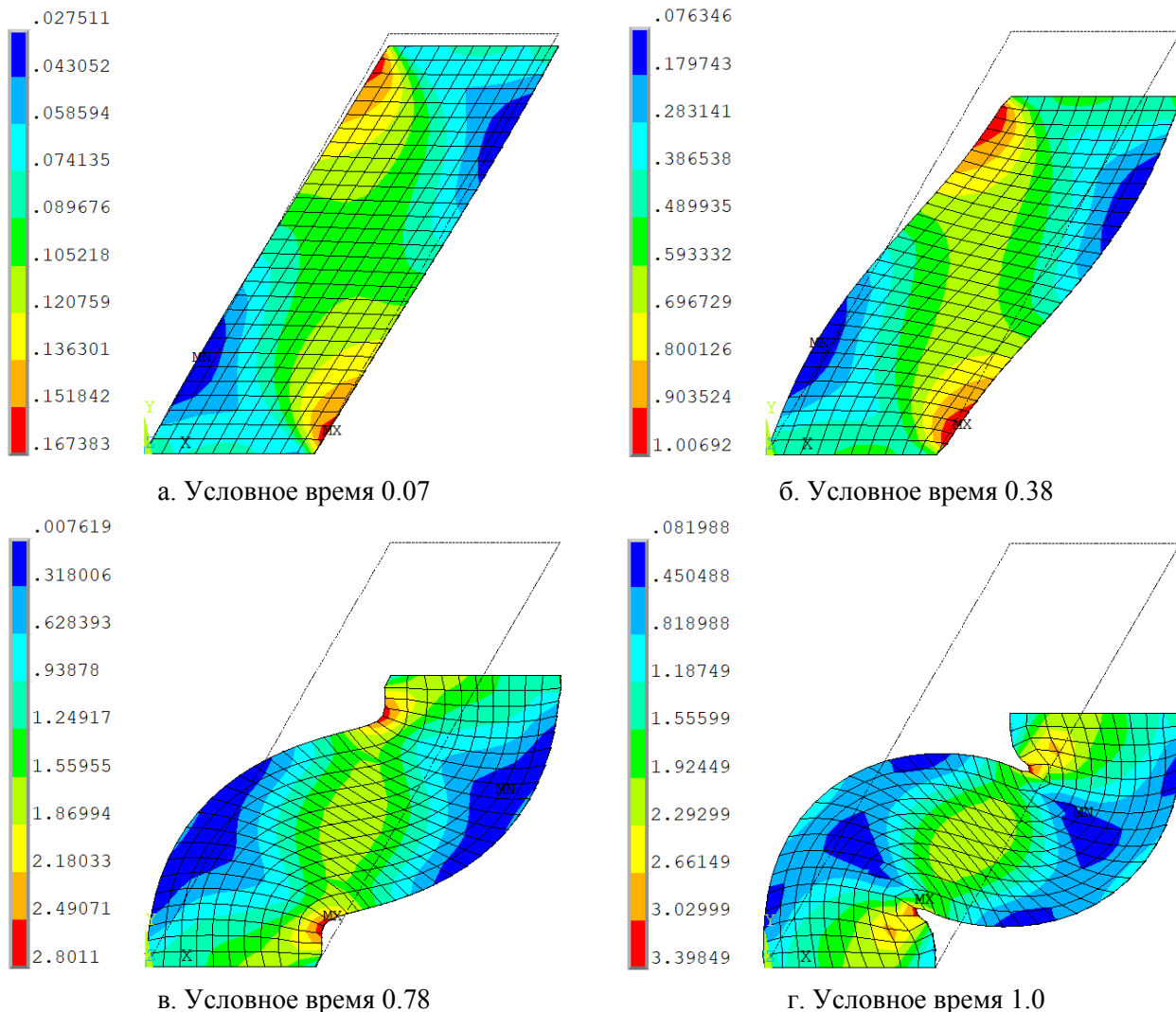


Рис. 9. Эквивалентные напряжения по Мизесу при статическом обжатии арочного амортизатора

На рис. 10 показана зависимость равнодействующей силы реакции R от вертикального перемещения δ при статическом обжатии арочного амортизатора с материалом Муни-Ривлина при условии плоской деформации. На графике можно наблюдать критическую точку. Состояния равновесия за этой точкой являются неустойчивыми. Они существуют только при кинематическом нагружении, когда мы фиксируем заданные перемещения обжатия.

Таким образом, мы определили предельную нагрузку, которую может выдержать амортизатор. По графику эта нагрузка составляет 160 Н. Здесь нужно сделать оговорку. Мы использовали модель плоской деформации и определили предельную нагрузку, которая приходится на толщину *одного конечного*

элемента, которая в данном расчете составляет 4 мм. Следовательно, на 1 мм будет приходиться 40 Н. Теперь, зная размер реального амортизатора, можно определить для него предельную нагрузку.

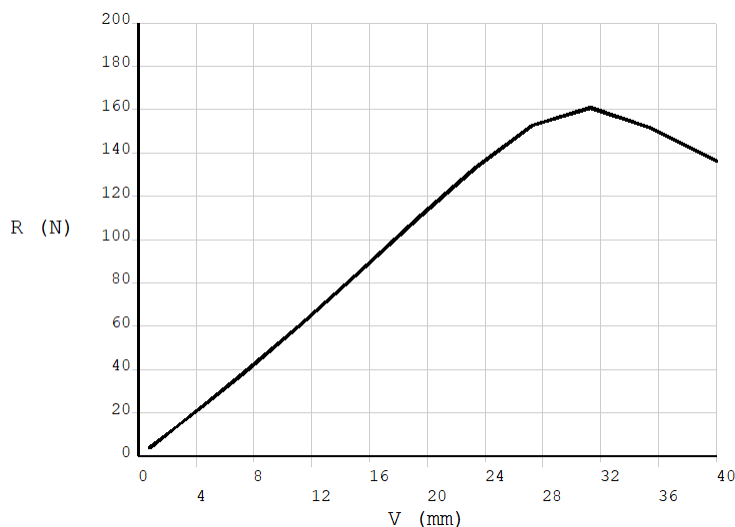


Рис. 10. Зависимость реакции от вертикального перемещения

В приложении 3 приведен командный файл для решения трехмерной задачи обжатия арочного амортизатора.

Задания

Выполните расчеты обжатия амортизатора для различных соотношений констант материала в условиях плоской деформации.

Постройте графики зависимости предельной нагрузки в зависимости от угла α . Постройте графики распределения нормальных и касательных напряжений на горизонтальных сечениях $y = \{0, H/4, H/2, 3H/4, H\}$. Определите, зависит ли скорость сходимости от соотношения констант материала.

Самостоятельно решите задачу обжатия арочного амортизатора в трехмерной постановке (Приложение 3). Сравните величину реакций для случаев плоской деформации и трехмерного. Объясните причины получения различных результатов.

*Постройте двумерную модель с использованием элементов **PLANE182**. Дополните модель условиями самоконтакта сторон. Под самоконтактом понимаем контакт одной части стороны сечения с другой ее частью. Проведите численные исследования полученной модели с условиями самоконтакта. Возможны ли устойчивые положения равновесия для такой модели?*

Раздувание квадратной мембраны равномерным давлением

Нормальная сжимаемость материала

Рассматривается задача о раздувании квадратной мембраны $20 \times 20 \times 1$ мм равномерным давлением $q = 0.11$ МПа, приложенным по нижней грани. В силу симметрии при численном решении моделируется только одна четверть

мембраны (первый квадрант в осях XOY). На внешних гранях задаётся отсутствие вертикального смещения U_z , на плоскостях симметрии – условия симметрии: равенство нулю нормальных перемещений и касательных усилий. Используется сетка $16 \times 16 \times 1$ восьмиузловых конечных элементов **SOLID185** с технологией выборочного сокращенного интегрирования (*B-bar* стабилизация).

Аналогично двум предыдущим примерам проведём сравнение решений для двух моделей поведения гиперупругого материала: модели неогукова материала и двухконстантной модели материала Муни–Ривлина, – для свойств с модулем сдвига $G = 1$ МПа и модулем объёмного сжатия $K = 2$ МПа (соответствуют коэффициенту Пуассона $\nu \approx 0,28571$). Для двухконстантного материала Муни–Ривлина – $C_{10} = 0.31$, $C_{01} = 0.19$.

На рисунках 11-12 приведены результаты решения для неогукова материала: соответственно на рис. 11 показано распределение вертикальных перемещений (U_z), на рис. 12 – распределение эквивалентных по Мизесу напряжений (σ_{EQV}).

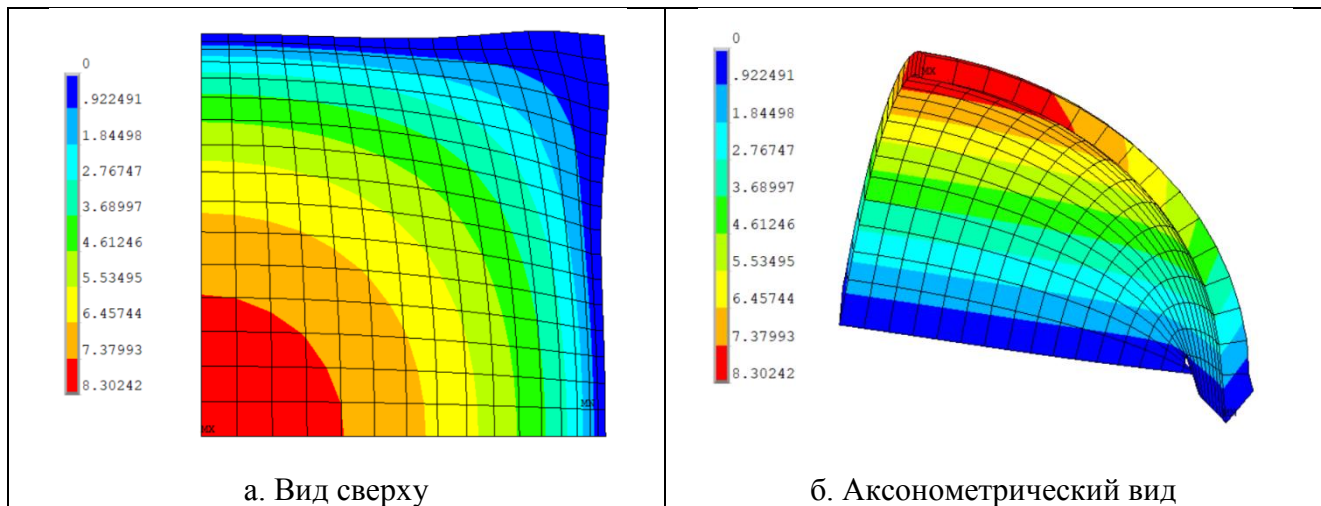


Рис. 11. Перемещение U_z

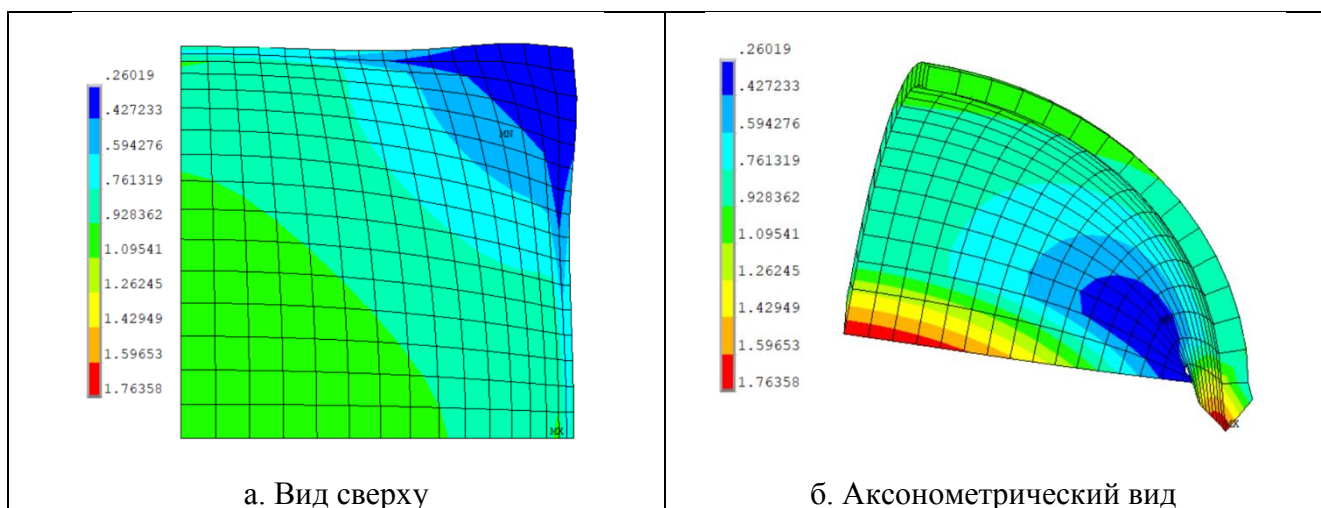


Рис. 12. Эквивалентное (по Мизесу) напряжение σ_{EQV}

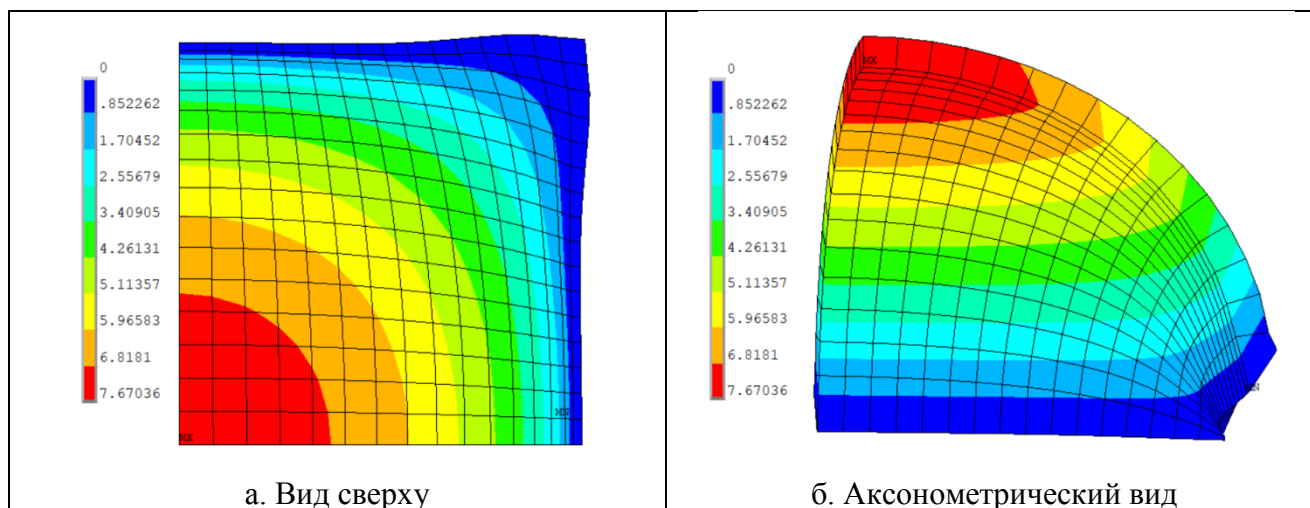


Рис. 13. Перемещение U_z

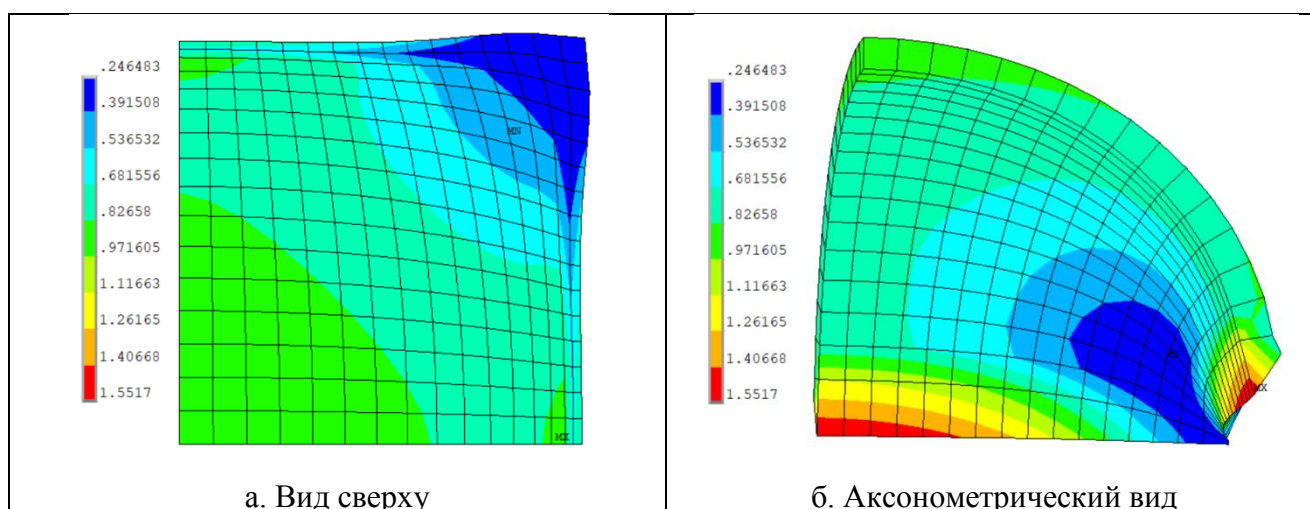


Рис. 14. Эквивалентное (по Мизесу) напряжение σ_{EQV}

На рисунках 13-14 приведены результаты решения для материала Муни–Ривлина: на рис. 13 – распределение вертикальных перемещений (U_z), на рис. 14 – распределение эквивалентных по Мизесу напряжений (σ_{EQV}).

В обоих случаях при раздувании мембрана приобретает куполообразную форму. Максимальные эквивалентные напряжения возникают в центре мембраны. Изменяется деформированная форма мембраны в плане, наблюдается изменение размеров мембраны около середин сторон, внешние стороны мембраны искривляются.

Аналогично предыдущим примерам для обеих моделей решения качественно похожи, количественно существенно различаются.

Задания

Попробуйте повторить решение задачи самостоятельно. Это не очень сложно: командный файл для решения задачи, которым можно воспользоваться, приведен в приложении 4.

Слабая сжимаемость материала

Рассмотрим ту же задачу о раздувании квадратной мембраны, но со свойствами материала Муни–Ривлина (2-х константная модель): $C_{10} = 0.36$ МПа,

$C_{01} = 0.22$ МПа и $K = 2000$ МПа ($d = 0.001$ МПа⁻¹). Эти данные соответствуют начальному значению модуля сдвига $G = 1.16$ МПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0.49971$.

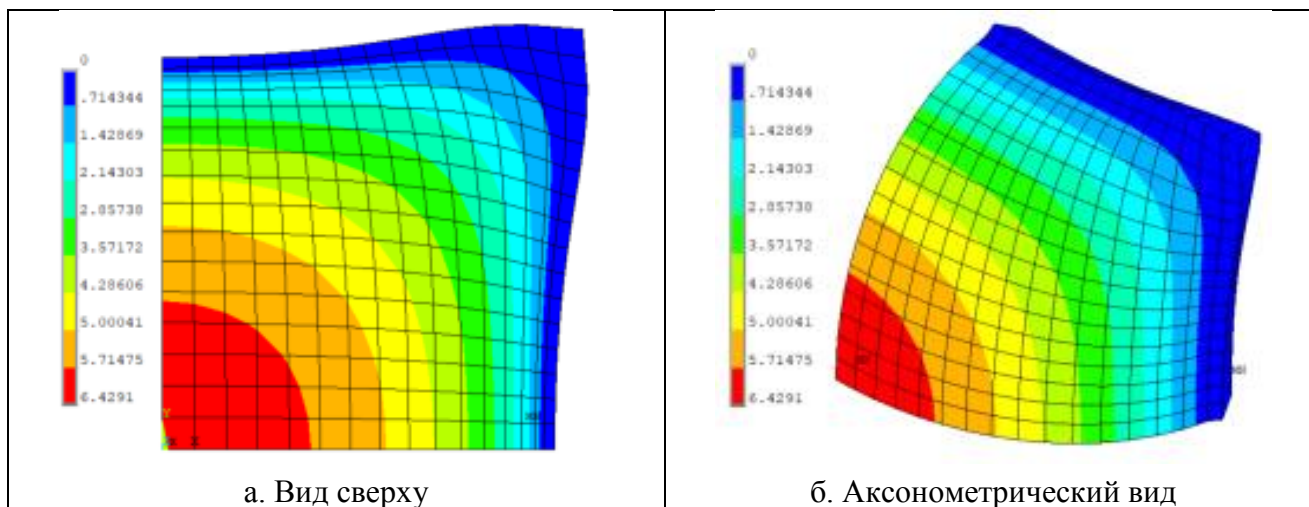


Рис. 15. Перемещение U_z

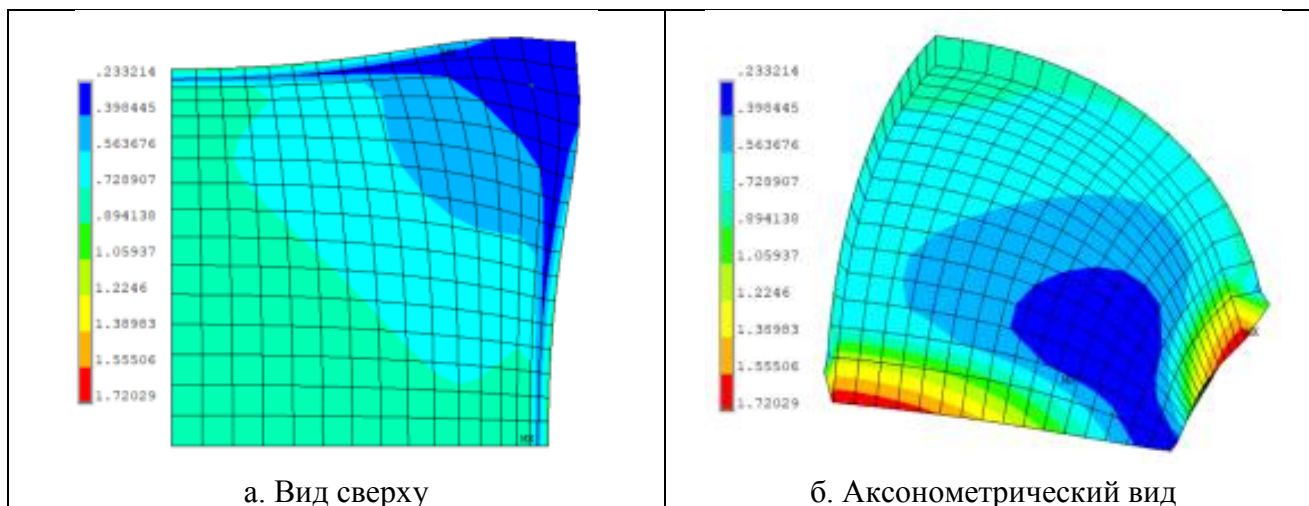


Рис. 16. Эквивалентное (по Мизесу) напряжение σ_{EQV}

На рисунках 15-16 приведены результаты решения аналогичные решениям с нормальной сжимаемостью: на рис. 15 – распределение вертикальных перемещений (U_z), на рис. 16 – распределение эквивалентных по Мизесу напряжений (σ_{EQV}).

Задания

Выполните расчёты раздувания квадратной мембраны для различных соотношений констант материала K/G . Определите, зависит ли скорость сходимости от соотношения констант материала.

Решите задачу для неогукова материала и таких же соотношений констант материала K/G . Определите зависимость различия решений от соотношения K/G .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков А.В., Леонтьев Н.В. Моделирование поведения гиперупругих материалов: Учебно-метод. пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 55 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. ANSYS. Mechanical APDL Documentation. Release 17.2.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
5. Сахаров А.С., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. 5th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 478 pp.
7. Султанов Л.У., Фахрутдинов Л.Р. Численное исследование гиперупругих материалов // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 9. С. 69-74.
8. Белкин А.Е., Семенов В.В., Семенов В.К. Численный анализ больших плоских деформаций арочного амортизатора // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2011. № 2. С. 55-64.

Командный файл решения задачи растяжения пластины

```

!*
/NOPR
KEYW,PR_SET,1      ! тип решаемой задачи
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
a=10              ! размер расчетной области (половина ширины пластины)
h=1              ! половина толщины пластины
n=16             ! число конечных элементов на стороне пластины (половина)
m=1             ! число конечных элементов по толщине пластины (половина)
C10=0.31        ! Параметры Муни-Ривлина (МПа или Н/мм2)
C01=0.19
G = 2*(C10+C01) ! модуль сдвига
K = 2           ! объёмный модуль
ν = (3*K-2*G)/(2*(3*K+G)) ! коэффициент Пуассона
d = 2/K        ! параметр несжимаемости
!*
/PREP7
!*
ET,1,SOLID185 ! выбор типа конечного элемента
KEYOPT,1,2,0 ! технология КЭ - полное интегрирование + метод Bbar
KEYOPT,1,6,0 ! элемент на основе принципа Лагранжа (в перемещениях)
!KEYOPT,1,6,1 ! элемент на основе смешанной формулировки (u-P)
!*
! Здесь можно активировать модель неогука, при этом
! деактивировать модель Муни-Ривлина
!TB,HYPE,1,1,2,NEO ! модель неогука (деактивирована)
!TBTEMP,0
!TBDATA,,G,d,,,,
!*
TB,HYPE,1,1,2,MOON ! модель Муни-Ривлина (активирована)

```

```

TBTEMP,0
TBDATA,,C10,C01,d,,,
!*
BLOCK,,a,,a,,h, ! геометрическая модель
!*
! Разбивка линий для задания густоты сетки
LESIZE, 5, , ,n, , , ,0
LESIZE, 8, , ,n, , , ,0
LESIZE, 9, , ,m, , , ,0
!*
MSHAPE,0,3D ! выбор формы элемента и
MSHKEY,1 ! типа сетка - mapped - регулярная
VMESH, 1 ! построение сетки для объема 1
!*
FINISH
!*
/SOL
ANTYPE,0 ! тип анализа - квазистатика
NLGEOM,1 ! учет геометрической нелинейности
NSUBST,10,0,0 ! устанавливаем 10 подшагов - приращений приложения
! ! нагрузки (автоматический выбор подшага
! ! присутствует)
!OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL ! определение вывода информации
TIME,1 ! условное время в конце шага
!*
DA,1,SYMM ! условие симметрии на 4 гранях
DA,2,SYMM ! обеспечивает плоскую деформацию, для плоского
! ! напряжённого состояния - убрать
DA,3,SYMM
DA,5,SYMM
!*
DA,6,UX,2*a ! задание кинематической нагрузки на боковой грани
DA,6,UY,0
!*
solve ! решить задачу на текущем шаге нагружения
!*
FINISH

```

**Командный файл решения задачи обжатия
арочного амортизатора в условиях плоской деформации**

```

!*
/NOPR
KEYW,PR_SET,1      ! тип решаемой задачи
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
Pi=acos(-1)      ! число Pi
!*
H=100            ! высота амортизатора
b=0.4*H          ! ширина опоры
delta=0.4*H      ! величина обжатия
alpha = 60       ! угол при основании в градусах
!*
m=10             ! число элементов на основании
!*
C10=0.31         ! параметры Муни-Ривлина
C01=0.19
G = 2*(C10+C01) ! модуль сдвига
K = 2            ! Объемные модуль
v=(3*K-2*G)/(2*(3*K+G)) ! коэффициент Пуассона
d = 2/K         ! параметр несжимаемости
!*
al=alpha/180*Pi ! угол при основании в радианах
!*
/PREP7
!*
ET,1,SOLID185    ! выбор конечного элемента
!*
KEYOPT,1,2,0     ! технология КЭ - полное интегрирование + метод Bbar
!KEYOPT,1,6,0    ! элемент на основе принципа Лагранжа (в перемещениях)

```



```

KEYOPT,1,6,1 ! элемент на основе смешанной формулировки (u-P)
!*
!TB,HYPE,1,1,2,NEO ! можно активировать модель неогука
!TBTEMP,0
!TBDATA,,G,d,,,,
!*
TB,HYPE,1,1,2,MOON ! модель Муни-Ривлина
TBTEMP,0
TBDATA,,C10,C01,d,,,
!*
t=b/m ! размер конечного элемента
!*
! опорные точки
k,,
k,,b,
k,,H/tan(al)+b,H
k,,H/tan(al),H
!*
a,1,2,3,4 ! фронтальная поверхность
!*
VOFFST,1,t, , ! "выдавливаем" объем толщиной по размеру КЭ
!*
ESIZE,t,0, ! размер КЭ
!*
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH, 1 ! построение сетки
!*
DA, 1,SYMM ! задаем плоскую деформацию
DA, 2,SYMM
!*
DA, 3,UX, ! условия заделки на нижней опоре амортизатора
DA, 3,UY,
!*
! Связывание узлов
NSEL,S,LOC,Y,H ! выбираем все узлы на нижнем основании
CM,UpperNodes,NODE ! создаем компонент (множество) UpperNodes с
! узлами на верхнем основании
*GET,upnd,NODE,,NUM,MIN ! upnd - меньший номер узла в выбранном
! множестве
!*
CP,1,UX,ALL ! все выбранные узлы имеют одинаковое перемещение UX
CP,2,UY,ALL ! все выбранные узлы имеют одинаковое перемещение UY
!*
ALLSEL,ALL ! активны все узлы

```

```

!*
D, upnd,UX,          ! граничное условие по X на верхней опоре
D, upnd,UY,-delta   ! граничное условие по Y на верхней опоре
!*
FINISH
!*
/SOL
!*
ANTYPE,0
NLGEOM,1
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
!AUTOTS,0
TIME,1
DELTIM,0.02,0,0.1
AUTOTS,1
!*
solve
!*
FINISH
!*
/POST1  ! постпроцессор
!*
/EDGE,1,1,45  ! отображаем ребра конечных элементов при выводе
!              результатов
/GLINE,1,0
!/REPLOТ

```

**Командный файл решения задачи
обжатия арочного амортизатора в трехмерной постановке**

```

!*
/NOPR
KEYW,PR_SET,1      ! тип решаемой задачи
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
Pi=acos(-1)      ! число Pi
!*
H=100            ! высота амортизатора
S=80             ! половина длины амортизатора
b=0.4*H          ! ширина опоры
delta=0.4*H      ! величина обжатия
alpha = 60       ! угол при основании в градусах
!*
m=10            ! число элементов на основании
!*
C10=0.36         ! параметры Муни-Ривлина
C01=0.22
G = 2*(C10+C01) ! модуль сдвига
K = 2000         ! объемный модуль
v=(3*K-2*G)/(2*(3*K+G)) ! коэффициент Пуассона
d = 2/K          ! параметр несжимаемости
!*
al=alpha/180*Pi ! угол при основании в радианах
!*
/PREP7
!*
ET,1,SOLID185    ! выбор конечного элемента
!*
KEYOPT,1,2,0     ! технология КЭ - полное интегрирование + метод Bbar

```

```

!KEYOPT,1,6,0 ! элемент на основе принципа Лагранжа (в перемещениях)
KEYOPT,1,6,1 ! элемент на основе смешанной формулировки (u-P)
!*
!TB,HYPE,1,1,2,NEO ! можно активировать модель неогука
!TBTEMP,0
!TBDATA,,G,d,,,,
!*
TB,HYPE,1,1,2,MOON ! модель Муни-Ривлина
TBTEMP,0
TBDATA,,C10,C01,d,,,,
!*
t=b/m ! размер конечного элемента
nz=S/t ! количество элементов по длине амортизатора
!*
! опорные точки
k,,
k,,b,
k,,H/tan(al)+b,H
k,,H/tan(al),H
!*
a,1,2,3,4 ! фронтальная поверхность
!*
VOFFST,1,S, , ! "выдавливает" объем длиной S
!*
ESIZE,t,0, ! размер КЭ
!*
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,1 ! построение сетки
!*
DA,1,SYMM ! задаем условие симметрии
!*
DA,3,UX, ! условия заделки на нижней опоре амортизатора
DA,3,UY,
DA,3,UZ,
!*
! Связывание узлов
NSEL,S,LOC,Y,H ! выбираем все узлы на нижнем основании
CM,UpperNodes,NODE ! создаем компонент (множество) UpperNodes с
! узлами на верхнем основании
*GET,upnd,NODE,,NUM,MIN ! upnd - меньший номер узла в выбранном
! множестве
!*
CP,1,UX,ALL ! все выбранные узлы имеют одинаковое перемещение UX
CP,2,UY,ALL ! все выбранные узлы имеют одинаковое перемещение UY

```

```

CP,3,UZ,ALL !все выбранные узлы имеют одинаковое перемещение UZ
!*
ALLSEL,ALL ! активны все узлы
!*
D, upnd,UX, ! граничное условие по X на верхней опоре
D, upnd,UY,-delta ! граничное условие по Y на верхней опоре
D, upnd,UZ, ! граничное условие по Z на верхней опоре
!*
FINISH
!*
/SOL
!*
ANTYPE,0
NLGEOM,1
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
!AUTOTS,0
TIME,1
DELTIM,0.02,0,0.1
AUTOTS,1
!*
solve
!*
FINISH
!*
/POST1 ! постпроцессор
!*
/EDGE,1,1,45 ! отображаем ребра конечных элементов при выводе
! результатов
/GLINE,1,0
!*

```

Командный файл решения задачи растяжения пластины

```

!*
/NOPR
KEYW,PR_SET,1      ! тип решаемой задачи
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
a=10              ! размер расчетной области (половина ширины пластины)
h=1              ! толщина пластины
n=16             ! число конечных элементов на стороне пластины (половина)
m=1             ! число конечных элементов по толщине пластины (половина)
C10=0.36        ! Параметры Муни-Ривлина (МПа или Н/мм2)
C01=0.22
G = 2*(C10+C01) ! модуль сдвига
K = 2000        ! объёмный модуль
ν = (3*K-2*G)/(2*(3*K+G)) ! коэффициент Пуассона
d = 2/K        ! параметр несжимаемости
q = 0.11       ! значение давления
!*
/PREP7
!*
ET,1,SOLID185 ! выбор типа конечного элемента
KEYOPT,1,2,0 ! технология КЭ - полное интегрирование + метод Bbar
KEYOPT,1,6,0 ! элемент на основе принципа Лагранжа (в перемещениях)
!KEYOPT,1,6,1 ! элемент на основе смешанной формулировки (u-P)
!*
! Здесь можно активировать модель неогуча, при этом
! деактивировать модель Муни-Ривлина
!TB,HYPE,1,1,2,NEO ! модель неогуча (деактивирована)
!TBTEMP,0
!TBDATA,,G,d,,,,
!*

```

```

TB,HYPE,1,1,2,MOON ! модель Муни-Ривлина (активирована)
TBTEMP,0
TBDATA,,C10,C01,d,,,
!*
BLOCK,,a,,a,,h, ! геометрическая модель
!*
! Разбивка линий для задания густоты сетки
LESIZE, 5, , ,n, , , , ,0
LESIZE, 8, , ,n, , , , ,0
LESIZE, 9, , ,m, , , , ,0
!*
MSHAPE,0,3D ! выбор формы элемента и
MSHKEY,1 ! типа сетка - mapped - регулярная
VMESH, 1 ! построение сетки для объема 1
!*
FINISH
!*
/SOL
ANTYPE,0 ! тип анализа - квазистатика
NLGEOM,1 ! учет геометрической нелинейности
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL ! определение вывода информации
TIME,1 ! условное время в конце шага
!*
DELTIM,0.001,0.0001,0.1 ! начинаем с мелких подшагов (большое
! искажение элементов)
AUTOTS,1
!*
DA,3,SYMM ! условия симметрии
DA,5,SYMM
!*
DA,4,UZ, ! закрепление боковых граней
DA,6,UZ,
!*
SFA,1,1,PRES,q ! давление на грань 1
!*
SOLVE ! решить задачу на текущем шаге нагружения
!*
!FINISH
!*
/EDGE,1,1,45 ! отображаем ребра конечных элементов при выводе
! результатов
/GLINE,1,0

```

Александр Васильевич **Жидков**
Николай Васильевич **Леонтьев**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ
ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**
Часть 2
Применение ANSYS

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.