Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского**

А.В. Баландин
Е.М. Макаров
А.Г. Разуваев

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика»,
01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»,
01.03.03 «Механика и математической моделирование»

Нижний Новгород
2019

УДК 514.122.2
ББК 22.151.5
Б-20

Б-20 Баландин А.В., Макаров Е.М., Разуваев А.Г. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЧАСТЬ 1: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. — 19 с.

Рецензент:
доцент кафедры прикладной математики ИИТММ к.ф.-м.н. **О.Е. Галкин**

Данное учебно-методическое пособие посвящено вопросам приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с использованием ортогональных инвариантов. Пособие предназначено для студентов первого курса Института информационных технологий, математики и механики, изучающих курс «Аналитическая геометрия».

УДК 514.122.2
ББК 22.151.5

Содержание

§1. Предварительные сведения

При изучении разделов теории кривых второго порядка, изложенных в методической разработке, предполагаются известными формулы преобразования координат от одного ортонормированного репера на плоскости к другому, канонические уравнения и способ приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, поэтому далее эти результаты приводим без доказательства.

В работе используются следующие сокращения: ОНБ — ортонормированный базис, ОНР — ортонормированный репер, КВП — кривая второго порядка, QED обозначает конец доказательства.

Теорема 1. Пусть $R = \{O, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ и $R' = \{O', B' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)\}$ — два ОНР на плоскости и $O'(x_0, y_0)$ в репере R. Тогда существуют коэффициенты ε, φ такие, что:

1) матрица перехода от базиса B к базису B' имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varepsilon\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{pmatrix}; \tag{1}$$

2) координаты точки $M(x, y)$ в ОНР R и той же точки $M(x', y')$ в ОНР R' связаны равенствами:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - \varepsilon y'\sin\varphi + x_0 \\ y = x'\sin\varphi + \varepsilon y'\cos\varphi + y_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Определение 1. Формулы (2) называются формулами преобразования координат точки при переходе от ОНР R к ОНР R'.

Приведем матричные формулировки соотношений (2). С учетом следующих обозначений: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, формулы (2) принимают вид:

$$X = CX' + X_0. \tag{3}$$

Далее будет полезна другая матричная запись тех же уравнений (2). Обозначим $D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{X'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда соотношения (2) эквивалентны единственному матричному равенству

$$\overline{X} = D\overline{X'}, \tag{4}$$

так как $D\overline{X'} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{X}$.

Определение 2. Матрица $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$ называется ортогональной, если

$$C^t C = E, \tag{5}$$

где E — единичная матрица порядка n.

Замечание 1. Непосредственная проверка показывает, что матрица вида (1), то есть матрица перехода от одного ОНБ на плоскости к другому, является ортогональной. Также отметим, что условие (5) равносильно каждому из следующих двух равенств: $C^t = C^{-1}$ и $CC^t = E$. Кроме того, из условия (5) нетрудно получить следующее свойство ортогональной матрицы $|C| = \pm 1$.

Определение 3. КВП — множество точек плоскости, которое в некотором ОНР задано уравнением вида

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \tag{6}$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22}, определяющих квадратичную часть, отличен от нуля, то есть $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Замечание 2. Очевидно, что в разных ОНР одна и та же КВП будет задана с помощью разных многочленов $F(x, y)$. Также очевидно, что и в одном и том же ОНР одна и та же КВП может быть задана с помощью разных многочленов от двух переменных, например, с помощью двух многочленов, которые отличаются друг от друга ненулевым множителем. На самом деле весь произвол таких многочленов исчерпывается указанным примером. А именно, справедливо утверждение: если два многочлена от двух переменных над полем комплексных чисел имеют одно и то же множество корней, то эти многочлены отличаются ненулевым множителем. Доказательство этого факта здесь не приводим. Важно отметить, что этот результат является уже неверным для случая поля вещественных чисел. Например, для двух многочленов x^2+y^2+1 и x^2+1 множество корней является пустым.

Теорема 2 (Приведение уравнения КВП к каноническому виду). Для каждой КВП существует ОНР, в котором она задана одним из следующих 9 канонических уравнений:

1)	вещественный эллипс:	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$	где $a \geq b > 0$;
2)	мнимый эллипс:	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1,$	где $a \geq b > 0$;
3)	гипербола:	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,$	где $a, b > 0$;
4)	пара вещественных пересекающихся прямых:	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,$	где $a \geq b > 0$;
5)	пара комплексных пересекающихся прямых:	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,$	где $a \geq b > 0$;
6)	парабола:	$y^2-2px=0,$	где $p > 0$;
7)	пара вещественных параллельных прямых:	$y^2-a^2=0,$	где $a > 0$;
8)	пара мнимых параллельных прямых:	$y^2+a^2=0,$	где $a > 0$;
9)	пара совпавших прямых:	$y^2=0.$	

Доказательство получается с помощью выполнения следующих двух преобразований ОНР. Сначала, если $a_{12} \neq 0$, то с помощью поворота исходного ОНР на ориентированный угол α такой, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a_{22}-a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}}, \tag{7}$$

коэффициент в уравнениии КВП при произведении неизвестных обращается в нуль. Последующий параллельный перенос ОНР приводит уравнение КВП к каноническому виду. QED

Замечание 3. В теореме 2 утверждается только существование для каждой КВП канонического уравнения и вопрос об его единственности остается открытым. Поэтому, вообще говоря, нельзя исключить возможность, что одна и та же КВП в разных ОНР может иметь разные канонические уравнения, то есть указанные в теореме 2 классы КВП могут пересекаться. Конечно, сейчас можно было бы доказать, что это невозможно (см., например, задачи 1, 2 и указания к ним). Такого рода доказательсто является весьма громоздким (перебор всех возможностей). Более полезным и эффективным в решении этого вопроса является рассматриваемый ниже метод ортогональных инвариантов.

Кроме того, способ определения канонического уравнения КВП, указанный при доказательстве теоремы 2, может оказаться достаточно трудоемким, поскольку приходится вычислять все коэффициенты КВП в преобразованном ОНР. Для решения этой задачи также оказывается эффективным метод ортогональных инвариантов, который не требует каждый раз пересчитывать коэффициенты КВП в новых системах координат. Вместе с тем, важно отметить, что использование метода ортогональных инвариантов в отличие от предыдущего метода уже не позволяет одновременно с определением канонического уравнения получить информацию о канонической системе координат КВП.

Во втором семестре в курсе алгебры изучаются обобщения ортогональных инвариантов для КВП.

Задачи

1. Доказать, что уравнение $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ с помощью замены ОНР нельзя привести к виду $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$. (Указание. Например, можно сравнить расстояния от центра эллипса до вершин эллипса в первом и во втором случае.)

2. Доказать, что уравнение $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 0$ с помощью замены ОНР нельзя привести к виду $\dfrac{y^2}{5^2} - 1 = 0$. (Указание. Найти прямую, имеющую единственную общую точку с первой КВП, и выяснить существование аналогичной прямой во втором случае.)

§2. Ортогональные инварианты многочлена

Определение 4. Пусть уравнение КВП (6) при переходе от ОНР R к ОНР R' принимает вид

$$F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0. \tag{8}$$

Функция $J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00})$ от коэффициентов многочлена $F(x, y)$ называется ортогональным инвариантом многочлена (второго порядка от двух неизвестных), если она не меняет своего значения при переходе от одного ОНР к другому, то есть

$$J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}) = J(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{10}, a'_{20}, a'_{00}). \tag{9}$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $S = a_{11} + a_{22}$.

Наша ближайшая цель — доказать, что функции S, δ, Δ являются ортогональными инвариантами многочлена. В качестве доказательства можно было бы предложить утомительную непосредственную проверку, которая, не содержит ничего, кроме громоздких вычислений, и не проясняет существа дела. Поэтому рассмотрим более содержательный способ доказательства. Для этого будет полезна матричная запись уравнения КВП.

Замечание 4. Поскольку многочлен, задающий КВП, определен не единственным образом, а с точностью до умножения на константу (см. замечание 2), то для одной и той же КВП, заданной с помощью пропорциональных многочленов, функции S, δ, Δ, вычисленные для этих многочленов, принимают разные значения, то есть не являются ортогональными инвариантами кривой.

Определение 5. Пусть КВП γ задана в репере ОНР R уравнением (6). Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix}$ называется матрицей КВП в репере R, а матрицы $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $L = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}$ называются, соответственно, матрицами квадратичной и линейной частей уравнения КВП в репере R.

Замечание 5. Иногда матрицы A и Q многочлена $F(x, y)$ вида (6) записывают в виде: $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{pmatrix}$, полагая при этом $a_{12} = a_{21}$, $a_{01} = a_{10}$, $a_{02} = a_{20}$.

Лемма 1. Многочлен $F(x, y)$ можно записать двумя следующими эквивалентными способами

$$F(x, y) = X^t Q X + 2L^t X + a_{00}, \tag{10}$$

$$F(x, y) = \overline{X}^t A \overline{X}, \tag{11}$$

где $X^t = (x, y), \overline{X}^t = (x, y, 1)$.

Доказательство получается непосредственной проверкой. Действительно, имеем равенство

$$X^tQX + 2LX + a_{00} = (x, y)Q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 2L^t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + a_{00} =$$
$$= (x, y)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 2(a_{10},\ a_{20})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + a_{00} =$$
$$= (a_{11}x + a_{12}y, a_{12}x + a_{22}y) \times \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 2(a_{10}x + a_{20}y) + a_{00} = F(x, y).$$

Второе равенство проверяется аналогично. QED

Замечание 6. Для каждого многочлена $F(x, y)$ матрицы, удовлетворяющие равенствам(10),(11), определены единственным образом.

Лемма 2. Пусть $F(x, y) = a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}$ и многочлен $F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00}$ получен из многочлена $F(x, y)$ с помощью замены

$$F'(x', y') = F(x(x', y'), y(x', y')), \tag{12}$$

где (x, y) и (x', y') связаны равенствами (3). Тогда

$$A' = \begin{pmatrix}a'_{11} & a'_{12} & a'_{10}\\a'_{12} & a'_{22} & a'_{20}\\a'_{10} & a'_{20} & a'_{00}\end{pmatrix} = D^tAD, \tag{13}$$

$$Q' = \begin{pmatrix}a'_{11} & a'_{12}\\a'_{12} & a'_{22}\end{pmatrix} = C^tQC. \tag{14}$$

Доказательство. Подставляя в многочлен (11) выражения (4) для $\overline{X}$ и $\overline{X}^t$, приходим для многочлена $F'(x', y')$ к равенствам $\overline{X}^tA\overline{X} = (D\overline{X}')^tA(D\overline{X}') = \overline{X}'^tD^tAD\overline{X}' = \overline{X}'^t(D^tAD)\overline{X}' = \overline{X}'^tA'\overline{X}' = F'(x', y')$. Отсюда в силу замечания 4 приходим к (13).

Для проверки равенства (14), учитывая (10) и (3), будем иметь

$$F'(x', y') = X^tQX+2LX+a_{00} = (CX'+X_0)^tQ(CX'+X_0)+2L(CX'+X_0)+a_{00} =$$
$$\underbrace{X'^t(C^tQC)X'}_{\text{квадратичная часть}} + \underbrace{X'^t(C^tQ)X'_0 + X^t_0QCX' + 2LCX'}_{\text{линейная часть}} + 2LX_0 + X^t_0QX_0 + a_{00}.$$

Отсюда получим (14). QED

Теорема 3. Функции S, δ, Δ являются ортогональными инвариантами многочлена второго порядка от двух переменных.

Доказательство. 1. Докажем инвариантность S, то есть проверим, что $S = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} = S'$. Заметим, что $S = \operatorname{tr} Q,\ S' = \operatorname{tr} Q'$, где $\operatorname{tr} Q$ обозначает след матрицы Q, то есть сумму ее диагональных элементов. Поскольку для произвольных матриц A и B справедливо равенство $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, то в данном случае выполнены соотношения $S' = \operatorname{tr} Q' = \operatorname{tr}(C^tQC) = \operatorname{tr}(Q(CC^t))$. Теперь в силу замечания 1 и равенства (5) получим $S' = \operatorname{tr} QE = \operatorname{tr} Q = S$.

2. Инвариантность δ следует из равенств $\delta' = |Q'| = |C^tQC| = |C^t||Q||C| = |Q| = \delta$.

3. Докажем инвариантность Δ. Для этого, раскладывая определитель $|D|$ по последней строке, заметим, что $|D| = |C|$. Из условия (5) получим $|C^t| \cdot |C| = 1$. С учетом этого имеем равенства $\Delta' = |A'| = |D^tAD| = |D^t| \cdot |A| \cdot |D| = |C^t| \cdot |A| \cdot |C| = |A| = \Delta$. QED

Определение 6. Уравнение

$$|Q - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

называется характеристическим уравнением многочлена $F(x, y)$ вида (10).

Теорема 4 (Корректность определения 6). Характеристическое уравнение многочлена не зависит от выбора ОНР.

Доказательство. Пусть Q и Q' — матрицы квадратичной части уравнения КВП, соответственно, в ОНР $R = \{O, B\}$ и $R' = \{O', B'\}$. Если C — матрица перехода от базиса B к B', то $|Q' - \lambda E| = |C^tQC - \lambda E| = |C^tQC - \lambda C^tC| = |C^t| \cdot |Q - \lambda E| \cdot |C| = |Q - \lambda E| = 0$. QED

Замечание 7. Другое доказательство теоремы 4 можно получить непосредствено вычисляя коэффициенты характеристического уравнения многочлена $F(x, y)$. Действительно, раскрывая определитель (15), получим

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \qquad (16)$$

Таким образом, коэффициенты характеристического уравнения являются ортогональными инвариантами. Поэтому корни характеристического уравнения многочлена также являются ортогональными инвариантами.

Теорема 5. Корни характеристического уравнения КВП являются вещественными.

Доказательство. Для дискриминанта характеристического уравнения (16) имеем равенства

$$S^2 - 4\delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0. \qquad \text{QED}$$

§3. Определение канонического уравнения КВП по инвариантам

Геометрический смысл корней характеристического уравнения выясняется в следующей теореме.

Теорема 6. В уравнении КВП коэффициент при произведении неизвестных равен нулю, то есть уравнение КВП в ОНР R' имеет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения.

Доказательство. 1. Пусть КВП задана уравнением (17). Тогда $S = S' = \lambda_1 + \lambda_2$, $\delta = \delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2$. Отсюда по теореме Виета получим, что λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (16).

2. Обратно. Пусть λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения КВП. Надо доказать существование по крайней мере одного ОНР R', в котором КВП задана уравнением (17).

Пусть КВП в ОНР R задана общим уравнением $F(x, y) = 0$. Возможны следующие два случая.

а) $a_{12} = 0$. Тогда в силу предыдущего пункта в качестве R' можно выбрать ОНР R, и тем самым все доказано.

б) $a_{12} \neq 0$. Определим угол α следующим равенством

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}. \tag{18}$$

Пусть ОНР R' получен поворотом ОНР R на ориентированный угол α. Докажем, что в ОНР R' уравнение КВП имеет вид (17).

Сначала проверим, что относительно ОНР R' коэффициент $a'_{12} = 0$. Пусть $\lambda_1 = \dfrac{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$. Подставляя λ_1 в равенство (18), получим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{(a_{22}-a_{11}) + \sqrt{(a_{22}-a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}$, что совпадает с выражением (7). Аналогично проверяется случай второго корня. Поэтому, учитывая рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2, получим, что в ОНР R' выполнено условие $a'_{12} = 0$. Теперь, как и в случае а), все доказано. QED

Часто необходимы более детальные сведения об ОНР, в которых КВП задана уравнением (17). Именно, информация о том: какой из корней характеристического уравнения в данном ОНР соответствует коэффициенту при при x'^2, а какой — коэффициенту при y'^2.

Лемма 3. Пусть КВП в ОНР R задана уравнением $F(x, y) = 0$, где $a_{12} \neq 0$. Пусть также λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения КВП, указанные в определенном порядке, и ОНР R' получен поворотом R на ориентированный угол α, определенный равенством (18). Тогда КВП в ОНР R' задана уравнением (17).

Доказательство. При доказательстве теоремы 6 было показано, что в ОНР R' выполнено условие $a'_{12} = 0$. Докажем, что $\lambda_1 = a'_{11}$. Для этого будет полезно равенство $Q' = C^t QC$. Умножая обе части на C, получим $CQ' = CC^t QC = EQC = QC$. Теперь, приравнивая в обеих частях элементы первой строки и первого столбца, будем иметь равенство $a'_{11}\cos\alpha - a'_{12}\sin\alpha = a_{11} \times \cos\alpha + a_{12}\sin\alpha$. Отсюда, с учетом условия $a'_{12} = 0$, получим $a'_{11}\cos\alpha = a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \cos\alpha(a_{11} + a_{12}\operatorname{tg}\alpha) = \cos\alpha(a_{11} + a_{12}(\frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}})) = \lambda_1\cos\alpha$. Тем самым доказано, что $a'_{11} = \lambda_1$. Из теоремы 6 следует, что второй корень характеристического уравнения совпадает с a'_{22}. QED

Для дальнейшей классификации КВП будет полезно разделить все КВП на следующие три класса в зависимости от коэффициентов уравнения (17).

Определение 7. Если с помощью поворота и параллельного переноса ОНР уравнение КВП можно привести к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a = 0, \qquad \lambda_1\lambda_2 \neq 0, \tag{19}$$

$$\lambda_2 y^2 + 2bx = 0, \qquad \lambda_2 \neq 0,\ b \neq 0, \tag{20}$$

$$\lambda_2 y^2 + a = 0, \qquad \lambda_2 \neq 0, \tag{21}$$

то будем говорить, что КВП является кривой, соответственно, первого, второго и третьего классов.

Замечание 8. Из теоремы 2 следует, что каждая КВП попадает или в один класс, или, может быть, сразу в несколько классов (см. замечание 3). Докажем, что последнее невозможно, тем самым установим корректность определения 7.

Для этого найдем значения ортогональных инвариантов для каждого из трех классов КВП.

Теорема 7. КВП принадлежит:

$$\begin{aligned} \text{первому классу} &\;\Leftrightarrow\; \delta \neq 0; \\ \text{второму классу} &\;\Leftrightarrow\; \delta = 0,\ \Delta \neq 0; \\ \text{третьему классу} &\;\Leftrightarrow\; \delta = 0,\ \Delta = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала проверим необходимость всех условий.

1. Для КВП первого класса из определения следует, что в некотором ОНР $a'_{11} = \lambda_1, a'_{12} = 0, a'_{22} = \lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Поэтому $\delta = \delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22} = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

2. Если КВП второго класса, то существует ОНР, в котором $a'_{11} = 0, a'_{12} = 0, a'_{22} = \lambda_2 \neq 0, a'_{10} = b \neq 0$. Отсюда находим инварианты

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_2 b^2 \neq 0 \tag{22}$$

и $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Для КВП третьего класса в некотором ОНР справедливы равенства $a'_{11} = 0, a'_{12} = 0, a'_{22} = \lambda_2 \neq 0$. Таким образом,

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 0,\ \delta = \delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Обратно. 1. Пусть $\delta \neq 0$. Рассуждая методом от противного, предположим, что КВП не является кривой первого класса. Тогда, по-доказанному, для КВП второго или третьего класса выполнено равенство $\delta = 0$, что противоречит условию.

В остальных случаях рассуждения аналогичны.

Далее, из определения инвариантов нетрудно видеть, что при умножении многочлена на константу $c \neq 0$ ортогональные инварианты многочлена преобразуются по правилу

$$S \mapsto cS, \quad \delta \mapsto c^2\delta, \quad \Delta \mapsto c^3\Delta.$$

Таким образом, разбиение множества КВП на классы, указанные в теореме, корректно. QED

Теперь все готово для завершения классификации КВП первого и второго класов. Для этого достаточно вычислить коэффициенты уравнений (19) и (20) через ортогональные инварианты КВП.

Теорема 8. Каждая КВП первого класса является одной и только одной из следующих: вещественный эллипс, мнимый эллипс, гипербола, пара вещественных пересекающихся прямых или пара комплексных пересекающихся прямых.

Множество КВП второго класса совпадает с множеством парабол.

Каноническое уравнение для каждой из указанных КВП определено единственным образом.

Доказательство. 1. Уравнение КВП первого класса по определению 7 имеет вид (19), где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения КВП по теореме 6. Вычислим коэффициент a через инварианты. Для этого используем равенства $\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 a = \delta a$, то есть $a = \frac{\Delta}{\delta}$.

Таким образом, в некотором ОНР уравнение КВП первого класса имеет вид:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{23}$$

Для получения канонического уравнения КВП первого класса осталось выбрать корни λ_1, λ_2 в нужном порядке. Из сравнения канонического уравнения 3) теоремы 2 (гиперболы) и уравнения (23) следует, что в случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\Delta \neq 0$ должно выполняться неравенство $\lambda_1\frac{\Delta}{\delta} < 0$. Во всех остальных случаях 1), 2), 4), 5) теоремы 2 следует выбрать λ_1 и λ_2 так, чтобы $|\lambda_1| = \frac{1}{a^2} \leq |\lambda_2| = \frac{1}{b^2}$.

Поскольку при умножении уравнения КВП на постоянный множитель c имеют место следующие формулы преобразования коэффициентов

$$\lambda_1 \mapsto c\lambda_1, \quad \lambda_2 \mapsto c\lambda_2, \quad \frac{\Delta}{\delta} \mapsto c\frac{\Delta}{\delta},$$

то и уравнение (23) также будет умножено на константу c. Аналогично, нетрудно видеть, что условия для упорядочения корней λ_1 и λ_2 не зависят от выбора c.

Таким образом, каноническое уравнение КВП первого класса определено единственным образом, так как его коэффициенты (квадраты полуосей) вычисляются единственным образом через ортогональные инварианты: $a^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}$, и, кроме того, эти формулы не изменяются при умножении исходного уравнения КВП на константу c.

2. Для КВП второго класса имеем уравнение (20), где $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$ — корни характеристического уравнения КВП и $\delta = 0,\ \Delta \neq 0$. Осталось выразить параметр p через инварианты. Из сравнения канонического уравнения 6) теоремы 2, равенств (20) и (22) имеем $p = |\frac{b}{\lambda_2}| = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^3}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}$, так как $S = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2$. Отсюда приходим к каноническому уравнению параболы

$$y^2 - 2x\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} = 0. \tag{24}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в конце доказательства пункта 1, завершают доказательство теоремы. QED

Для КВП третьего класса оба инварианта δ и Δ обращаются в нуль. Поэтому приходится использовать еще одну функцию от коэффициентов уравнения КВП.

Обозначим $K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$.

Лемма 4. Коэффициент a_{00} и функция K — инвариантны относительно преобразований ОНР, сохраняющих начала координат, то есть при указанных преобразованиях сохраняют свои значения.

Доказательство. Для преобразований, сохраняющих начало координат, матрица D имеет вид $D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому D является ортогональной, так как $D^tD = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

Покажем, что коэффициенты многочлена $f_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ — инвариантны относительно рассматриваемых преобразований. Действительно, из равенства $A' = D^tAD$ получим

$$f_{A'}(\lambda) = |A' - \lambda E| = |D^tAD - \lambda E| = |D^t| \cdot |A - \lambda(D^t)^{-1}D^{-1}| \cdot |D| = |A - \lambda E|.$$

В то же время непосредственные вычисления показывают, что

$$|A-\lambda E| =$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{00}) - \lambda\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\right) + |A| =$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2(S+a_{00}) - \lambda(K+\delta) + \Delta.$$

Поскольку S, δ являются ортогональными инвариантами, то a_{00}, K также инварианты. QED

Теорема 9. Для многочленов, определяющих КВП третьего класса, функция K является ортогональным инвариантом.

Доказательство. Из определения 7 и теоремы 7 следует, что $\delta = \Delta = 0$ и $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Выполним поворот ОНР на ориентированный угол α, такой, что выполнено (18), то есть $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$. Тогда в ОНР R', который получен поворотом исходного ОНР, имеют место равенства $a'_{12} = 0$, $a'_{11} = \lambda_1 = 0$, $a'_{22} = \lambda_2 \neq 0$. Теперь из условия $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{10} \\ 0 & a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{10} & a'_{20} & a'_{00}\end{vmatrix} = 0$ следует, что в R' выполнено условие $a'_{10} = 0$. Поэтому уравнение КВП принимает вид:

$$F(x', y') = a'_{22}y'^2 + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0 \tag{25}$$

и $K = K' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a'_{00}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{20} & a'_{00}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{20} & a'_{00}\end{vmatrix}$.

Пусть ОНР $\overline{R}$ получен из ОНР R' при параллельном переносе, который соответствует замене координат $x' = \overline{x} + x_0,\ y' = \overline{y} + y_0$. Обозначим $\overline{K}$ значение функции K от коэффициентов КВП, соответствующих ОНР $\overline{R}$, и докажем, что $\overline{K} = K$. Для этого сначала найдем формулы преобразования коэффициентов уравнения КВП (25) при соответствующем параллельном переносе. Имеем равенства $F(\overline{x}, \overline{y}) = a'_{22}(\overline{y}+y_0)^2 + 2a'_{20}(\overline{y}+y_0) + a'_{00} = a'_{22}(\overline{y})^2 + 2(a'_{22}y_0 + a'_{20})\overline{y} + a'_{22}y_0^2 + 2a'_{20}y_0 + a'_{00}$.

Отсюда

$$\overline{K} = \begin{vmatrix} \overline{a}_{22} & \overline{a}_{20} \\ \overline{a}_{20} & \overline{a}_{00}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{22}y_0 + a'_{20} \\ a'_{22}y_0 + a'_{20} & a'_{22}y_0^2 + 2a'_{20}y_0 + a'_{00}\end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{22}y_0 + a'_{20} \\ a'_{20} & a'_{20}y_0 + a'_{00}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{20} & a'_{00}\end{vmatrix} = K' = K. \quad \text{QED}$$

Теорема 10. КВП третьего класса является одной и только одной из следующих кривых: пара параллельных вещественных прямых, пара параллельных мнимых прямых или пара совпавших прямых. Канонические уравнения этих КВП определены единственным образом.

Доказательство. КВП третьего класса в некотором ОНР имеет уравнение (21), поэтому $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$. Вычислим коэффициент a в (21) через инварианты S, K. Для этого запишем равенства $K = \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = \lambda_2 a$. Поэтому $a = \frac{K}{\lambda_2} = \frac{K}{S}$. Окончательно получаем каноническое уравнение КВП в виде

$$y'^2 + \frac{K}{S^2} = 0. \tag{26}$$

Единственность канонического уравнения получается с помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 8. QED

Используем классификацию КВП для характеризации с помощью инвариантов следующего класса КВП.

Определение 8. КВП называется *распадающейся* или *вырожденной*, если она состоит из прямых комплексных или вещественных. В противном случае КВП называется нераспадающейся или невырожденной.

Теорема 11. КВП распадается тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

Доказательство. 1. Пусть КВП распадается. Тогда из классификации следует, что каноническое уравнение КВП имеет вид $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0$ или $a_{22}y^2 + a_{00} = 0$. Вычисляя в обоих случаях инвариант Δ, находим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ или $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{00} \end{vmatrix} = 0$.

2. Обратно. Пусть $\Delta = 0$. Если КВП первого класса, то из уравнения (23) получим ее каноническое уравнение: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$, то есть КВП является парой пересекающихся прямых вещественных или комплексных.

Для КВП второго класса (параболы) всегда $\Delta \neq 0$.

Для всех КВП третьего класса условие $\Delta = 0$ выполнено. Поэтому в этом случае получим пары параллельных вещественных, мнимых или совпавших прямых. QED

В заключение приведем таблицу, в которой указаны значения инвариантов для каждого вида кривых.

№	Каноническое уравнение	δ	$S,\ \Delta$	K	Класс
1	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	>0	$S\Delta<0$		I
2	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	>0	$S\Delta>0$		I
3	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	<0	$\Delta\neq 0$		I
4	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	<0	$\Delta=0$		I
5	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$	>0	$\Delta=0$		I
6	$y^2-2px=0$	0	$\Delta\neq 0$		II
7	$y^2-a^2=0$	0	$\Delta=0$	<0	III
8	$y^2+a^2=0$	0	$\Delta=0$	>0	III
9	$y^2=0$	0	$\Delta=0$	0	III

Авторы выражают благодарность Н.А. Степанову за многочисленные обсуждения и ряд полезных замечаний.

Литература

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. — СПб.: Лань, 2003. — 160 с.

2. Постников М.М. Лекции по геометии. Семестр 1. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979. — 336 с.

3. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. — М.: Просвещение, 1974. — 351 с.

Александр Владимирович **Баландин**
Евгений Маратович **Макаров**
Алексей Григорьевич **Разуваев**

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный унивеситет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.