

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет

**А.П. Протогенов**  
**В.Е. Семенов**  
**А.И. Смирнов**

## **КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета  
«Высшая школа общей и прикладной физики»  
для студентов ННГУ 3-5 курсов, обучающихся по направлениям подготовки  
03.03.02 «Физика» (бакалавриат) и 03.04.02 «Физика» (магистратура)

Нижний Новгород  
2019

УДК 53:001.89 (075.8)  
ББК В53ся73-5  
П83

П83 Протогенов, А.П. Качественные методы в физических исследованиях: электронное учебно-метод. пособие / А.П. Протогенов, В. Е. Семенов, А.И. Смирнов. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 29 с.

В пособии рассматривается применение качественных методов (анализ размерностей, оценка физических величин, исследование с помощью асимптотик и законов сохранения) в различных физических задачах. Показано, как с помощью этих методов провести предварительный анализ изучаемых явлений.

Предназначено для студентов 3-5 курсов факультета ННГУ «Высшая школа общей и прикладной физики», обучающихся по направлениям 03.03.02 «Физика» (бакалавриат) и 03.04.02 «Физика» (магистратура). Рекомендовано также студентам других факультетов и институтов ННГУ для совершенствования навыков решения физических задач.

Рецензент: д.ф.-м. н. **Е.Н. Пелиновский**

Ответственный за выпуск:  
председатель методической комиссии факультета  
«Высшая школа общей и прикладной физики» ННГУ,  
д.ф.-м.н., профессор **А.М. Фейгин**

УДК 53:001.89 (075.8)  
ББК В53ся73-5

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>4</b>
<b>КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ</b> .....	<b>6</b>
<b>1.1. Анализ размерностей</b> .....	<b>6</b>
<b>1.2. Границы метода</b> .....	<b>13</b>
<b>1.3. Оценки физических величин</b> .....	<b>14</b>
<b>1.4. Исследование с помощью асимптотик</b> .....	<b>20</b>
<b>1.5. Законы сохранения</b> .....	<b>23</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>25</b>
<b>ЗАДАЧИ</b> .....	<b>27</b>
<b>Список литературы</b> .....	<b>29</b>

## ВВЕДЕНИЕ

При попытке решить какую-либо проблему почти всегда возникает желание её предельно упростить. Опираясь на запас приемов и аналогий, интуицию, знание физических законов, специалист поступает следующим образом. Прежде всего он делает набросок, строит физическую модель [1].

Существует несколько основных типов моделей:

- 1) модель-гипотеза («такое могло бы быть»), например модель атома Томпсона;
- 2) феноменологическая модель («ведем себя так, как если бы ...») – кварковая модель;
- 3) эвристическая модель («количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела») – мешочная модель адрона;
- 4) модель-приближение («что-то считаем очень малым или очень большим») – идеальный газ;
- 5) модель-аналогия («учтём только некоторые ключевые особенности») – модель Изинга;
- 6) мысленный эксперимент («главное состоит в обсуждении идеальной возможности») – цикл Карно.

Приступая к измерениям или расчётам, исследователь не только пробует представить, что он хочет измерить или вычислить, но и пробует понять, что получится в результате работы. Совокупность приёмов создания предварительной картины изучаемого явления, которыми пользуется физик исследователь, обычно называют качественными методами. К ним относят анализ размерностей, оценки с помощью простых моделей, изучение предельных случаев, когда может быть использована малость какого-либо параметра, восстановление качественно правильного поведения в целом по асимптотикам и, наконец, использование свойств симметрии, законов сохранения и следующих из них запретов.

Анализ размерностей даёт возможность выяснить, какой эксперимент из ряда возможных следует поставить, чтобы получить наиболее полезную информацию. С его помощью можно вывести ряд основных физических формул и восстановить в памяти забытое. Это – повседневный инструмент для проверки уравнений. Размерностные оценки помогают получить частные решения задач, слишком сложных для решения обычными методами. Оценки совершенно незаменимы при обобщении информации, получаемой из эксперимента на моделях. В достоинствах метода можно убедиться, рассматривая поучительные примеры. Вместе с тем метод размерностей не заменяет собой подхода, позволяющего точно решить задачу, поскольку последний даёт возможность глубже проникнуть в существо задачи.

Уже краткое перечисление областей применения метода размерностей показывает, что изучение анализа размерностей оправдывает затраченное вре-

мя. Его применение в практических расчетах не вызывает трудностей, а удача создаёт отнюдь не обманчивое ощущение собственных сил. Привычка оперировать физическими величинами с размерностной точки зрения приобретает легко. Любой, кто проявит интерес к анализу размерностей, вскоре обнаружит, что небольшие затраты времени и усилий существенно повысят его уровень знаний, разовьют интуицию и обогатят его математический арсенал. Физика без страха перед экзаменами, без ошибок в уравнениях и при записи законов природы — вполне законное желание всех, кто изучает эту науку.

Главная цель метода размерностей, которую мы будем преследовать, состоит в практическом их применении. Поэтому изложению теории будет уделено существенно меньше места, чем изучению практических способов применения анализа размерностей при решении конкретных задач. Мы обсудим частные примеры, которые дадут ясное представление о предмете. Можно надеяться, что впервые соприкасающийся с данной темой с помощью примеров приобретёт некоторые навыки применения метода размерностей как инструмента в научных исследованиях. В следующих разделах мы покажем, как используются в физических исследованиях другие качественные методы.

Настоящее методическое пособие представляет собой отредактированный его первый вариант, в подготовке которого к печати принимал участие профессор Владимир Евгеньевич Семенов. Его памяти мы посвящаем приводимый ниже текст второго издания пособия.

# КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ

## 1.1. Анализ размерностей

Выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения основных величин называется размерностью. Здесь мы приведём без доказательства следующие утверждения [2]:

1. Размерность произвольной физической величины может быть лишь произведением *степеней* размерностей величин, принятых за основные.
2. В качестве основных физических величин примем длину, массу и время с обозначениями, соответственно,  $L, M, T$ .
3. Размерность обеих частей равенства, отражающего некоторую закономерность должна быть одинакова.
4. Всякое соотношение между некоторым числом размерных величин, характеризующих данное физическое явление, можно представить в виде соотношения между меньшим числом безразмерных комбинаций, составленных из этих величин.

Последнее утверждение называется  $\pi$  – теоремой. Некоторые величины при конструировании безразмерной комбинации придётся возвести, конечно, в какие-то степени. Приравняв составленную безразмерную комбинацию константе, мы получим искомую закономерность. Проиллюстрируем сформулированное правило простыми примерами.

**Пример 1.** *Скорость распространения волн в шнуре* [3].

Дёргая за конец упругого резинового шнура, один из концов которого неподвижно закреплён, а другой находится у вас в руке, можно наблюдать бегущие по нему волны. Предположим, что скорость распространения бегущей волны  $v$  степенным образом зависит от силы натяжения шнура  $F$ , массы  $\mu$  в расчете на единицу длины и амплитуды колебаний  $l$ . Всего у нас, как мы видим, четыре величины. Составим следующую таблицу:

Величина	Обозначение	Формула размерности		
Скорость волны	$v$	$L$		$T^{-1}$
Сила натяжения шнура	$F$	$L$	$M$	$T^{-2}$
Амплитуда колебаний	$l$	$L$		
Линейная плотность струны	$\mu$	$L^{-1}$	$M$	

Перемножим степени находящихся в нашем распоряжении величин:  $vF^\alpha l^\beta \mu^\gamma$ , где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – некоторые числа<sup>1</sup>. Размерность полученного произведения величин равна

<sup>1</sup> Размерности физических величин обозначаются буквой в квадратных скобках. Например размерность длины есть  $[L]$ . Однако с целью избежать громоздкости в обозначениях в этом пособии мы опустим квадратные скобки в размерностях физических величин.

$$L^{1+\alpha+\beta-\gamma} M^{\alpha+\gamma} T^{-1-2\alpha}.$$

Эта комбинация величин будет безразмерной, если потребовать обращения в ноль показателей степеней каждой из основных величин, входящих в рассматриваемое произведение. Из системы уравнений

$$1 + \alpha + \beta - \gamma = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad -1 - 2\alpha = 0$$

следует, что  $\alpha = -1/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1/2$ .

Интересующий нас закон выражается формулой  $vF^{-1/2}\mu^{1/2} = C$ , где  $C$  – безразмерная постоянная, или

$$v = C\sqrt{F/\mu}$$

Численный коэффициент  $C$  в рамках размерностных оценок определить, конечно, нельзя. В этой задаче предположение о зависимости скорости волны от амплитуды  $l$  оказалось излишним – скорость волны от амплитуды не зависит.

Обратим внимание, однако, на то, что если бы мы включили в число величин, от которых зависит скорость, длину волны  $\lambda$ , то нетрудно убедиться, что константа  $C$  превратилась бы в функцию, зависящую от отношения  $l/\lambda$ . Полученный нами ответ для скорости волны означает, что эта функция обращается в константу в случае колебаний малой амплитуды  $l \ll \lambda$ .

Рассмотренный пример, где мы включили в число основных величин амплитуду  $l$ , указывает также на то, что применение метода размерностей чрезвычайно критично к выбору величин, между которыми ищется взаимосвязь. Часто бывает так, что их выбор оказывается неудачным и приводит к абракадабре.

**Пример 2.** *Сильный взрыв в атмосфере* [4].

Мы будем интересоваться законом движения ударной волны, которая возникла после взрыва, то есть её расстоянием  $r$  от центра взрыва к моменту времени  $t$ . Очевидно, что масштаб явления должен зависеть от выделившейся энергии  $E$  и инерционных свойств атмосферы – её плотности  $\rho$ . Итак, уравнение, связывающее физические величины, содержит следующие переменные:

Величина	Обозначение	Формула размерности		
Расстояние	$r$	$L$		
Энергия	$E$	$L^2$	$M$	$T^{-2}$
Плотность	$\rho$	$L^{-3}$	$M$	
Время	$t$			$T$

Представим  $r$  как произведение остальных величин, возведенных в ту или иную степень:

$$r = CE^\alpha \rho^\beta t^\gamma,$$

где  $C$  – константа. Соответствующее уравнение размерности имеет вид

$$L = (L^2 M T^{-2})^\alpha (L^{-3} T^\gamma).$$

Потребовав совпадения размерностей левой и правой части, получим

$$1 = 2\alpha, \quad 0 = \alpha + \beta, \quad 0 = -2\alpha + \gamma.$$

Следовательно,  $\alpha = 1/5$ ,  $\beta = -1/5$ ,  $\gamma = 2/5$ , то есть

$$r = C(E/\rho)^{1/5} t^{2/5}.$$

Если полученный результат разделить на  $t$ , то мы находим порядок величины скорости движения ударной волны

$$v = C \left( \frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}}.$$

Отсюда видно, что скорость волны падает со временем.

Заметим, что если бы мы включили в число основных параметров давление газа, то можно было бы показать, используя подход из первого примера, что полученные формулы справедливы до тех пор, пока скорость ударной волны больше скорости звука.

Несмотря на экзотические степени в законе движения ударной волны, он имеет ясный физический смысл. Если плотность кинетической энергии  $\rho v^2/2$  умножить на объем, который имеет порядок  $r^3$ , то мы получим, в чём нетрудно убедиться, энергию взрыва  $E$ .

Очень грубо можно оценить и давление ударной волны. Если разделить энергию  $E$  на объём шара с радиусом  $r$ , то мы получим плотность энергии к моменту времени  $t$ . Размерность этой величины  $L^{-1}MT^{-2}$  совпадает с размерностью давления. Поэтому можно думать, что это и есть характерное давление на поверхности шара – фронте ударной волны:

$$p = C_1 E^{2/5} \rho^{3/5} t^{-6/5},$$

где  $C_1$  – число. Точное решение задачи приводит к той же формуле.

**Пример 3.** Вольт-амперная характеристика вакуумного диода.

В этой задаче необходимо определить зависимость плотности электронного тока между катодом и анодом в вакуумном баллоне от напряжения. Прежде всего следует решить, какие физические величины определяют плотность тока. Кроме напряжения  $U$ , плотность тока, очевидно, зависит от расстояния  $d$  между катодом и анодом и от электронных констант: заряда  $e$  и массы  $m$  электрона. Причем существенно, что плотность тока должна зависеть от отношения  $e/m$ , как это следует из второго закона Ньютона. Выпишем размерности перечисленных величин.

Величина	Обозначение	Формула размерности		
Плотность тока	$j$	$L^{-1/2}$	$M^{1/2}$	$T^{-2}$
Удельный заряд	$e/m$	$L^{3/2}$	$M^{-1/2}$	$T^{-1}$
Расстояние	$d$	$L$		
Напряжение	$U$	$L^{1/2}$	$M^{1/2}$	$T^{-1}$

Связь между этими величинами можно представить уравнением

$$j = C (e/m)^\alpha d^\beta U^\gamma.$$

Соответствующее уравнение размерности имеет вид

$$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-2} = (L^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} T^{-1})^\alpha L^\beta (L^{1/2} M^{1/2} T^{-1})^\gamma.$$

Приравнивая показатели степеней, имеем

$$-1/2 = 3/2\alpha + \beta + 1/2\gamma, \quad 1/2 = -1/2\alpha + 1/2\gamma, \quad -2 = -\alpha - \gamma,$$

откуда  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = 3/2$ . Поэтому

$$j = C \sqrt{\frac{e}{m}} d^{-2} U^{3/2}.$$

Найденная зависимость называется законом Богуславского-Ленгмюра, или законом «трёх вторых». Численное значение константы  $C$  зависит от геометрии задачи (от того, являются ли электроды плоскими, цилиндрическими или имеют сферическую форму).

Рассмотренный пример показывает, что предварительное обсуждение существенных величин необходимо сочетать с выводами, следующими из точной теории. Если бы с самого начала масса электрона учитывалась бы отдельно, а не в отношении  $e/m$ , то получился бы, как нетрудно убедиться, бесполезный ответ

$$j = \sqrt{e^4/(md^7)} m (Ud/e)^\gamma.$$

Это выражение можно записать как

$$j = \sqrt{e^4/(md^7)} m f(Ud/e),$$

где  $f(x)$  – произвольная функция.

**Пример 4.** Частота колебаний капли жидкости, падающей из отверстия [3,5].

Слегка деформированная сферическая капля, предоставленная самой себе, из-за действия сил поверхностного натяжения пульсирует относительно равновесного положения. Составим таблицу существенных физических величин.

Величина	Обозначение	Формула размерности	
Частота колебаний	$\nu$		$T^{-1}$
Коэффициент поверхностного натяжения	$\sigma$	$M$	$T^{-2}$
Плотность жидкости	$\rho$	$L^{-3}$	$M$
Радиус капли	$r$	$L$	

Уравнение, связывающее переменные, имеет вид

$$\nu = C \sigma^\alpha \rho^\beta r^\gamma.$$

Отсюда найдем уравнение размерностей

$$T^{-1} = (MT^{-2})^\alpha (L^{-3}M)^\beta L^\gamma.$$

Приравнивая показатели, получаем  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = -1/2$ ,  $\gamma = -3/2$ , то есть

$$\nu = C \sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}}.$$

Рассматриваемый пример интересен ещё в одном отношении. Одна из моделей атомного ядра – капельная модель – предполагает, что ядро в некоторых случаях ведет себя подобно капле, обладающей поверхностным натяжением.

ем. Полученная формула позволяет оценить характерные частоты колебаний ядра.

Пусть на один нуклон приходится энергия  $\varepsilon$ . Тогда на  $A$  нуклонов, образующих ядро, придется полная энергия  $A\varepsilon$ . Если предположить, что ядро, подобно капле, удерживается от распада силами поверхностного натяжения, то отсюда легко оценить коэффициент поверхностного натяжения:  $\sigma \sim A\varepsilon/S$ , где  $S = 4\pi r^2$  – площадь поверхности ядра, то есть  $\sigma \sim A\varepsilon/r^2$ .

Поэтому, согласно нашей формуле, оценка частоты колебаний ядра будет иметь вид

$$v \sim \left( \frac{\varepsilon}{m_p r^2} \right)^{1/2}.$$

Мы учли, что масса ядра  $m = Am_p$ , где  $A$  – массовое число,  $m_p$  – масса протона. Подставив числа  $\varepsilon = 8 \sim 10^{-5}$  эрг,  $r \sim A^{1/3}r_0$ , где характерный протонный масштаб  $r_0 \sim 10^{-13}$  см,  $A = 235$ ,  $m_p \sim 10^{-24}$  г, найдём, что характерные частоты  $v \sim 10^{22}$  с $^{-1}$ .

Пусть в некотором опыте оказываются существенными четыре величины:  $x, y, z, v$ . Предположим также, что предварительно с помощью анализа размерностей обнаружено, что

$$v = C \frac{x}{y} \left( \frac{y}{z} \right)^\alpha$$

с неизвестным значением показателя степени  $\alpha$ . В эксперименте, конечно, излишне показывать, что  $v$  пропорционально  $x$ , так как это установлено ещё до опыта из анализа размерностей. С другой стороны, было бы полезно найти зависимость  $v$  от  $z$  и тем самым определить  $\alpha$ . Если  $\alpha$  окажется равным 1, тогда  $v$  не зависит от  $y$  и пропорционально  $x/z$ .

Следующая задача поясняет ограничения, присущие стандартному методу размерностей, и способы расширения области применения размерностного анализа.

**Пример 5.** *Период колебаний поплавок массы  $m$  и площадью поперечного сечения  $S$  при небольшом смещении его от положения равновесия [5].*

Очевидно, что к числу величин, играющих существенную роль в данной задаче, следует отнести также плотность жидкости  $\rho$  и ускорение свободного падения  $g$ . Ниже приведена таблица, содержащая размерности рассматриваемых величин.

Величина	Обозначение	Формула размерности
Период колебаний	$t$	$T$
Масса	$m$	$M$
Площадь поперечного сечения	$S$	$L^2$
Плотность жидкости	$\rho$	$L^{-3}$
Ускорение свободного падения	$g$	$L$
		$T^{-2}$

Полагая

$$t = C m^\alpha S^\beta \rho^\gamma g^\delta,$$

получим уравнение размерностей

$$T = M^\alpha (L^2)^\beta (L^{-3}M)^\gamma (LT^{-2})^\delta.$$

Из требования однородности по размерности имеем систему уравнений

$$0 = 2\alpha - 3\gamma + \delta, \quad 0 = \alpha + \gamma, \quad 1 = -2\delta$$

с решением

$$\beta = -3/2\alpha, \quad \gamma = -\alpha, \quad \delta = -1/2;$$

следовательно,

$$t = C \left(\frac{m}{\rho}\right)^\alpha S^{-3/2\alpha+1/4} g^{-1/2},$$

или

$$t = C \sqrt{\frac{S^{1/2}}{g}} \left(\frac{m}{\rho S^{3/2}}\right)^\alpha.$$

Из-за того, что уравнений меньше числа неизвестных на двойку, показатель степени  $\alpha$  остался неопределенным. Увеличить число уравнений можно, только лишь увеличив число физических величин, принятых за основные.

Будем различать масштаб в вертикальном и горизонтальном направлениях. Для этого снабдим символ  $L$  соответствующими индексами:  $L_x, L_y, L_z$ . Такой способ, именуемый векторной размерностью, увеличит число основных величин на требуемую единицу и позволит тем самым определить  $\alpha$ . Прежде всего перепишем таблицу:

Величина	Обозначение	Формула размерности
Период колебаний	$t$	$T$
Масса	$m$	$M$
Площадь поперечного сечения	$S$	$L_x L_y$
Плотность жидкости	$\rho$	$L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} M$
Ускорение свободного падения	$g$	$L_z T^{-2}$

и уравнение размерностей

$$T = M^\alpha (L_x L_y)^\beta (L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} M)^\gamma (L_z T^{-2})^\delta.$$

Отсюда

$$0 = 2\beta - \gamma, \quad 0 = \delta - \gamma, \quad 0 = \alpha + \gamma, \quad 1 = -2\delta,$$

то есть  $\alpha = 1/2, \beta = \gamma = \delta = -1/2$ . Следовательно,

$$t = C \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

Рассмотрим задачу, в которой необходимо использовать дополнительные по отношению к методу размерности соображения.

**Пример 6.** Чему равна по порядку величины толщина  $h$  слоя воды на крыше палатки, при котором палатка ещё не течёт?

В условиях, когда ткань палатки – несмачиваемая, число определяющих величин задачи, в состав которых входят плотность воды  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ , размер дырок между нитями  $r$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ , превышает число основных величин. Поэтому ответ, полученный с помощью метода размерности, бессодержателен:

$$h = Cr \left( \frac{\sigma}{\rho g r^2} \right)^\alpha.$$

Здесь  $\alpha$  – неизвестный показатель.

Для определения  $\alpha$  используем простое дополнительное соображение: в этой задаче важна не толщина слоя воды, а его давление  $\rho g h$  на ткань. Предположение о том, что в ответ должна входить комбинация  $\rho g h$ , позволяет сразу определить показатель степени  $\alpha$ . Действительно, учитывая, что гидростатическое давление  $\rho g h$  должно быть меньше или порядка лапласовского, получаем:

$$h = C \frac{\sigma}{\rho g r}.$$

Этот результат может быть получен также с помощью метода векторных размерностей. Составим следующую таблицу размерностей:

Величина	Обозначение	Формула размерности
Коэффициент поверхностного натяжения	$\sigma$	$L_x^{-1/2} L_y^{-1/2} L_z \quad M \quad T^{-2}$
Размер отверстия	$r$	$L_x^{1/2} L_y^{1/2}$
Плотность жидкости	$\rho$	$L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} \quad M$
Ускорение свободного падения	$g$	$L_z \quad T^{-2}$

Записывая искомую зависимость в виде

$$h = C \sigma^\alpha r^\beta \rho^\gamma g^\delta,$$

обычным способом найдём, что  $\alpha = -\beta = -\gamma = -\delta = 1$ , то есть  $h = C \frac{\sigma}{\rho g r}$ .

В рассматриваемой задаче верхняя строчка в таблице требует пояснения. Формула размерности для коэффициента поверхностного натяжения раньше имела вид  $MT^{-2}$ . Сейчас эффективная составляющая поверхностного натяжения  $\sigma_z = \sigma \cos\theta$ , где  $\theta$  – краевой угол, имеет размерность  $L_z MT^{-2}/L_x$  или  $L_z MT^{-2}/L_y$ . (Краевой угол описан формулой  $\cos\theta = L_z/\sqrt{L_z^2 + L_x^2} \approx L_z/L_x$ ; последнее справедливо при  $L_z \ll L_x$ ). Симметризуя относительно вертикальной оси  $z$ , выразим размерность коэффициента поверхностного натяжения и радиуса дырки так, как это записано в таблице.

## 1.2 Границы метода

Все рассмотренные примеры объединяет, как нетрудно увидеть, одно обстоятельство. Это – предположение о степенной зависимости одних величин от других. Метод размерности позволяет получить степени разных параметров и не дает зависимостей типа логарифма или синуса. С другой стороны, надо ясно понимать, что аргументами *любой функции* могут быть лишь *безразмерные величины* (см. примеры 3 и 4). Это значит, что, приступая к решению задачи, полезно прежде всего ввести безразмерные переменные. Часто оказывается, что после этого задачу решать уже и не нужно, так как физическая картина ясна, а безразмерные переменные, как правило, изменяются в масштабах порядка единицы. Такой набросок совершенно необходим на первой стадии решения, когда нас интересует качественная сторона явления. Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий высказанные соображения.

**Пример 7.** *Движение тела в вязкой среде.*

Уравнение движения тела массы  $m$  в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v.$$

Предполагается, что тело под действием силы тяжести  $mg$  движется вниз. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha}{m} \left( \frac{mg}{\alpha} - v \right).$$

Отсюда следует, что  $mg/\alpha = v_0$  имеет размерность скорости, а  $m/\alpha = t_0$  – размерность времени. Если сначала  $v = 0$ , то  $dv/dt > 0$ , то есть скорость будет возрастать и через некоторое время станет равной  $v_0$ , а  $dv/dt$  монотонно обратится в нуль. Это значит, что  $v_0$  есть тот предел, к которому стремится скорость, а  $t_0$  – то характерное время, за которое скорость выйдет на постоянное значение  $v_0$ . очевидно, что высота, на которой это произойдет, порядка  $v_0 t_0 = gm^2 / \alpha^2$ .

Записанному в безразмерных переменных  $u = v/v_0$  и  $\tau = t/t_0$  уравнению

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - u$$

удовлетворяет в качестве решения функция  $u(\tau) = 1 - \exp(-\tau)$  с областью изменения от нуля до единицы.

Введение безразмерных переменных оказывается полезным и при решении задач, на последней стадии которых необходимо вычислить интеграл.

**Пример 8.** *Температурная зависимость внутренней энергии газа невзаимодействующих частиц.*

Внутренняя энергия  $E$ , вычисляемая с помощью распределения Максвелла, равна

$$E = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \times$$

$$\times \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \right\} dv_1 dv_2 dv_3.$$

Здесь  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $v_i$  – компонента скорости,  $m$  – масса частицы. После введения переменных интегрирования  $x_i = (m/2kT)^{1/2} v_i$  внутренняя энергия

$$E = cT,$$

$$c = k\pi^{-3/2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \exp \{ -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \} dx_1 dx_2 dx_3$$

оказывается пропорциональной температуре.

При детальном описании явления существенны не только параметры системы, но и функциональная связь между обезразмеренными величинами. С помощью одного только метода размерностей мы не можем определить функциональных соотношений между ними. Метод размерностей не эффективен и в тех случаях, когда изучаемая величина состоит из двух слагаемых разной природы, но одного порядка.

### 1.3 Оценки физических величин

Кроме освоения методов анализа размерностей начинающему физику следует научиться делать оценки физических величин. Оценки часто подсказывают и сам путь более точного решения задачи. Обратимся к простым примерам.

**Пример 9.** *Температура испарения твердых тел [7].*

Обсуждение температуры испарения твердых тел удобно начать с вопроса: «Почему температура испарения порядка 3000 градусов, а не в 10, 100 раз больше?» Казалось бы, для удаления атома из кристаллической решетки ему следовало бы сообщить энергию  $kT$ , равную его энергии связи в кристалле ( $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура). Тогда при энергии связи  $E = -3$  эВ температура испарения  $T_{ev}$  оказалась бы равной  $3 \cdot 10^4$  градусов. Как же получить правильный ответ?

Рассмотрим кристалл, построенный из некоторых атомов и над ним газ из тех же атомов. Температуру испарения естественно определить как такую температуру, при которой число атомов, вылетающих с поверхности твердого тела в газ, равно числу атомов, возвращающихся назад.

Вероятность  $W_{c \rightarrow g}$  того, что какой-либо атом вылетит из объема, занятого телом, согласно распределению Больцмана в  $\exp \{ |E|/kT_{ev} \}$  раз меньше вероятности  $W_{g \rightarrow c}$  перехода атома из газа внутрь того же объема. Последняя вероятность, грубо говоря, равна вероятности, с которой атом газа может достичь поверхности кристалла. Из-за того, что плотность газа примерно в  $10^3$  раз меньше плотности твердого тела,  $W_{c \rightarrow g}/W_{g \rightarrow c}$ . (В грубом приближении твердое тело можно рассматривать как плотный газ, заключенный в объеме, занятом этим телом). Поскольку в кристалл может проникнуть любой газовый атом,

достигший его поверхности, а из кристалла может выйти только часть атомов на поверхности, равная  $\exp\{-|E|/kT_{ev}\}$ , то, приравнивая количество атомов величине в  $\exp\{-|E|/kT_{ev}\} = 10^{-3}$  получаем  $T_{ev} \sim \frac{|E|}{k \ln 10^3} \sim 4000^\circ K$ , что имеет правильный порядок величин.

**Пример 10.** *Определение числа атомов в жидкости из ее поверхностного натяжения и теплоты испарения*[7].

Будем считать, что каждый атом в глубине жидкости связан со своими соседями шестью связями. Поэтому на каждый атом приходится энергия связи  $E = 6\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – энергия единичной связи. Атомы, находящиеся на поверхности жидкости, имеют только пять связей со своими соседями. Возникающая сила стремится втянуть атомы внутрь жидкости, создавая тем самым поверхностное натяжение.

Коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  определяется как отношение энергии атомов на поверхности к площади поверхности, что по порядку величины совпадает с отношением поверхностной энергии одного атома  $\varepsilon = E/6$  к площади его поперечного сечения или, что совпадает по порядку величины, к квадрату расстояния между атомами:  $\sigma = E/6d^2$ . Если теплота испарения одного атома равна  $E$ , то теплота испарения  $1\text{ см}^3$  будет порядка отношения теплоты испарения одного атома к его объему, имеющего порядок  $d^3$ :

$$E_{ev} = E/d^3.$$

Отсюда

$$\frac{\sigma}{E_{ev}} = \frac{d}{6} = \frac{1}{6N},$$

где  $N$  – число атомов в цепочке длиной  $1\text{ см}$ . Таким образом, линейную плотность атомов

$$N = \frac{E_{ev}}{6\sigma}$$

можно определить, измерив коэффициент поверхностного натяжения и скрытую теплоту испарения. Если это число возвести в куб, то мы найдем концентрацию атомов в жидкости.

В рамках упрощенных оценок иногда удастся найти ещё более простой и наглядный способ вывода искомой формулы. Как это сделать в нашем случае? Мы хотим сосчитать число атомов в  $1\text{ см}^3$  воды. Разрежем мысленно этот объем на  $N$  слоев толщиной в  $1$  атом. Повторив операцию в других измерениях, мы получим в конце концов изолированные атомы, то есть полностью «испарим» жидкость. Каждый разрез обнажает  $2\text{ см}^2$  поверхности и тем самым увеличивает поверхностную энергию на  $2\sigma$ . Сделав  $N = 1/d$  разрезов в каждом из трех направлений, мы получим энергию, затраченную на разрезание  $1\text{ см}^3$  воды,

$$2\sigma \cdot N \cdot 3 = 6\sigma N,$$

Которая должна быть равна скрытой теплоте испарения  $1\text{ см}^3$  воды. Следовательно,  $N = E_{ev}/6\sigma$ . Этот замечательный способ пересчитывать атомы сводит

задачу всего лишь к двум экспериментам по определению  $E_{ev} = C_{ev}\rho$  и  $\sigma$  ( $C_{ev}$  — теплоемкость в расчете на один грамм,  $\rho$  — плотность жидкости).

**Пример 11. Модуль Юнга [3].**

Рассмотрим модель ионного кристалла, похожего на кристалл поваренной соли  $NaCl$ , но отличающийся от последнего тем, что в узлах кристаллической решетки находятся атомы одинаковой массы. Пусть плотность кристалла  $\rho$ , а кристаллическая решетка построена из чередующихся положительных и отрицательных ионов с зарядом  $\pm e$  и массовым числом  $A$ . Силами, действующими на каждый ион, являются обычные кулоновские силы. Оценим плотность электростатической энергии системы ионов, которую часто называют упругим модулем Юнга  $G$ . (Упругие свойства вещества определяются межатомными взаимодействиями).

Плотность энергии  $E$ , очевидно, зависит от плотности кристалла  $\rho$ , заряда электрона  $e$ , массы ядра  $m_k = Am_p$ , где  $m_p$  — масса нуклона. Пользуясь методами размерностного анализа, найдем, что

$$G \sim e^2 m_k^{-4/3} \rho^{4/3} = \frac{\rho}{m_k} \frac{e^2}{(m_k/\rho)^{1/3}} = n \frac{e^2}{a}.$$

Здесь  $a = (m_k/\rho)^{1/3}$  — среднее расстояние между ионами, а  $n = \rho/m_k = a^{-3}$  — концентрация ионов. При  $\rho = 5$  г/см<sup>3</sup>,  $A = 50$ ,  $n = 10^{23}$  см<sup>-3</sup>,  $a = 2 \cdot 10^{-8}$  см, упругий модуль Юнга  $G \sim 10^{11} \div 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup> (эрг/см<sup>3</sup>).

Кроме кулоновских сил притяжения противоположно заряженных ионов, существуют ещё и силы отталкивания, сильно возрастающие при сжатии решетки. Из соображений размерности мы оценили только кулоновский вклад ионов в потенциальную энергию. Пока расстояния между ионами больше размеров атомов, мы можем считать, что *по порядку величины* кулоновская энергия ионов и полная энергия связи, включающая энергию отталкивания, совпадают. На меньших расстояниях это, конечно, не так. Поэтому, когда мы считаем энергию связи ионного кристалла порядка кулоновской энергии, мы должны помнить, что это правильно до тех пор, пока атомы располагаются не слишком близко друг к другу.

Обратим внимание на то, что концентрация ионов  $n \sim \rho/m_k \sim a^{-3}$ . Поэтому  $G \sim ne^2/a \sim e^2/a^4$ . Отсюда следует, что, так как расстояние между ионами не может быть меньше боровского радиуса  $a_0$ , упругий модуль любой кристаллической решетки ограничен сверху величиной  $e^2/a_0^4 \sim 10^{14}$  эрг/см<sup>3</sup> ( $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ ,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m_e$  — масса электрона). Сами формулы указывают нам границы справедливости наших утверждений.

Если решётку сдавливать, то при  $a \rightarrow a_0$  одновременно со сближением ионов начнется обдирание их электронных оболочек (энергия  $e^2/a$  при  $a \rightarrow a_0$  будет порядка характерной атомной энергии  $m_e e^4/\hbar^2$ ). Сжимая со всех сторон, мы уменьшим расстояние между ядрами и обобществим все электроны, что для неметаллических кристаллов приведет к их металлизации.

Как правило, в любой задаче исследование может быть продолжено. В нашем примере сейчас легко оценить и скорость звука  $s$  в кристаллической

решётке. Из анализа размерностей следует, что  $s^2 \sim G/\rho$ . Учтем, что  $\rho \sim n m_k$ ,  $G \sim n e^2/a$ , то есть  $m_k s^2 \sim e^2/a$  или  $s^2 \sim e^2/(m_k a)$ . (Кулоновская энергия  $e^2/a$  оказывается порядка кинетической энергии  $m_k s^2$ ). Расстояние между атомами  $a$  можно для грубой оценки считать не слишком отличающимся от борковского радиуса  $a_0$ . Тогда

$$s \sim \left(\frac{m_e}{m_k}\right)^{1/2} v,$$

где  $v = e^2/\hbar$  – характерная скорость электрона в атоме. Мы видим, что скорость звука определяется отношением массы электрона к массе ядра. С рассмотренной задачей тесно связан следующий пример.

**Пример 12.** *Максимальная высота гор [7].*

Слишком высокая гора приведет к растеканию коры планеты под ней. Высота, начиная с которой будет происходить оседание горы, определяется равенством сжимающего напряжения плотности энергии ожижения кристаллической решётки. Сжимающее напряжение в основании горы равно  $\rho g h$ , где  $\rho$  – плотность вещества,  $g = \gamma M/R^2$  – ускорение свободного падения,  $h$  – высота горы,  $R$  – радиус планеты,  $\gamma$  – гравитационная постоянная. Мы предполагаем, что  $h \ll R$ . Плотность энергии ожижения вещества порядка  $10^{-2} G$ , где  $G$  – модуль всесторонней деформации Юнга, а множитель  $10^{-2}$ , грубо говоря, есть отношение модуля сдвига к модулю сжатия. Итак, оценка максимальной высоты горы имеет вид:

$$\rho g h_{max} \sim 10^{-2} G \sim 10^{-2} e^2/a^4 \sim 10^{-2} m_k^{-4/3} \rho^{4/3}.$$

Подставляя  $\rho \sim M/R^3$  и  $g = \gamma M/R^2$ , получим

$$\frac{h_{max}}{R} \sim \frac{10^{-2} e^2}{\gamma m_k^{4/3} M^{2/3}}.$$

С другой стороны, если учесть, что  $kT_{mit} \sim 10^{-2} G a^3$ , то  $\rho g h_{max} \sim kT_{mit}/a^3$ . Отсюда видно, что так как  $a^{-3} = n$ , а  $\rho = n m_k$ ,

$$h_{max} \sim \frac{kT_{mit}}{m_k g}.$$

Физический смысл последней формулы очевиден. Она показывает, что разрушение гор начинается тогда, когда потенциальная энергия атома  $m_k g h_{max}$  на вершине горы становится порядка энергии ожижения кристаллической решётки  $kT_{mit}$  в расчете на один атом. Подставляя числа  $T_{mit} \sim 10^{30}$  К,  $m_k \sim 50 m_p \sim 10^{-22}$  г, получим  $h_{max} \sim 26$  км. Оценка высоты гор несколько превышает действительные значения. Это можно объяснить тем, что горы из-за пластичности пород будут опускаться ещё до расплавленного основания. Заметим, что эту оценку мы получили, не используя табличных данных о радиусе и массе планеты, так как данные о них вобрало в себя ускорение свободного падения  $g$ .

**Пример 13.** *Максимальные магнитные поля в лаборатории [3].*

Обсудим проблему получения в лабораторных условиях очень сильных магнитных полей. Если мы хотим получать такие поля с помощью соленоидов, то есть цилиндрических катушек, по обмотке которых течет ток, то мы должны позаботиться о том, чтобы они не разрушались механическими напряжениями. При пропускании через обмотку сильных токов эти напряжения могут достигать довольно больших значений. Кроме этого нужно, конечно, следить, чтобы проволока не плавилась.

Сила Ампера, действующая на проводник с током, пропорциональна произведению силы тока и напряженности поля  $H$ . В свою очередь поле  $H$  определяется током и пропорционально ему. Поэтому сила, а, следовательно, и давление пропорциональны

$$H^2 \ll G,$$

где  $G$  — модуль Юнга. Заметим, что модуль Юнга и предел прочности — физически разные величины. Нас интересуют сейчас грубые оценки. Поэтому мы считаем, что предел прочности по порядку величины не сильно отличается от  $G$ . При  $G \sim 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup> это следующее ограничение на магнитное поле, которое можно создать с помощью соленоида:  $H \ll 10^6$  Гс.

В реальных условиях разрушение материалов начинается значительно раньше, чем напряжения достигнут значений порядка упругих модулей. Приведенная оценка показывает лишь то, что существуют *принципиальные ограничения* возможностей лабораторных или заводских установок для получения сильных магнитных полей.

Сложнее сделать оценки, относящиеся к плавлению проволоки. Здесь всё зависит от того, каковы условия охлаждения соленоида. Часто работают с импульсными магнитными полями, разряжая через катушку мощную батарею конденсаторов. В этом случае может случиться так, что даже при очень сильных токах проволока *не успеет* расплавиться за время разряда. Здесь ограничение связано с тем, что время разряда принципиально не может быть сделано меньше характерного для каждой системы минимального времени.

**Пример 14.** *Время исчезновения магнитного поля* [3].

Рассмотрим металлический шар, помещенный во внешнее магнитное поле с напряженностью  $H$ . Внутри неферромагнитного шара магнитное поле совпадает с внешним, а плотность энергии, как мы уже знаем (см. пример 13), порядка  $H^2$ . Попробуем оценить характерное время удержания магнитного поля этим шаром при отключении внешних источников.

Выключение магнитного поля приведет к появлению индукционного электрического поля и вызванного им тока (тока Фуко). Энергия магнитного поля перейдет в конечном итоге в джоулево тепло  $j^2/\sigma$ , выделенное за 1 с в 1 см<sup>3</sup>. Здесь  $j$  — некоторое среднее значение плотности тока,  $\sigma$  — проводимость металла. Если время исчезновения магнитного поля есть  $\tau$ , то

$$\frac{j^2}{\sigma} \tau \sim H^2.$$

Связь между плотностью тока  $j$  и магнитным полем  $H$  найдем следующим образом. По порядку величины ЭДС индукции равна  $ER$ , где  $E$  — средняя за время  $\tau$  напряженность индукционного электрического поля, а  $R$  — радиус шара. С другой стороны, согласно закону Фарадея ЭДС порядка  $\Phi/(c\tau)$ , где  $\Phi \sim HR^2$  — магнитный поток, который существовал до выключения поля,  $c$  — скорость света,  $\tau$  — время исчезновения поля. Таким образом,

$$ER \sim \frac{HR^2}{c\tau},$$

то есть  $E \sim HR/(c\tau)$ ,  $j = \sigma E \sim \sigma HR/(c\tau)$ . Вместе с балансом энергии это даёт

$$\tau \sim \frac{\sigma R^2}{c^2}.$$

В случае проводников другой формы под  $R$  нужно понимать некоторый характерный размер области, занятой магнитным полем. Эта же формула определяет и время проникновения *включенного* внешнего поля в металл. Типичную скорость проникновения магнитного поля

$$v \sim \frac{R}{\tau} \sim \frac{c^2}{\sigma R}$$

иногда называют скоростью диффузии магнитного поля в проводник. Из последней оценки следует, чем больше область с характерным размером  $R$ , уже занятая полем, тем меньше скорость проникновения.

Полученная оценка «работает» и в другом явлении, которое называется скин-эффектом. Если металл поместить во внешнее электромагнитное поле, которое изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega \sim \tau^{-1}$ , то характерная глубина  $R$ , на которую проникает поле вглубь металлического образца, будет определяться формулой

$$R \sim \frac{c}{\sqrt{\sigma\omega}},$$

следующей из выражения для  $\tau$ . Мы видим, что толщина разогреваемой поверхности корки, где существует поле, течет ток и выделяется джоулево тепло, убывает с ростом частоты как  $\omega^{-1/2}$ .

Такие оценки носят, конечно, ориентировочный характер и являются довольно грубыми. Мы многим пренебрегаем. Например, не учитываем излучение шаром при выключении  $H$  электромагнитных волн. В случае скин-эффекта мы не знаем границ справедливости оценки для толщины скин-слоя. Можно лишь утверждать, что мы получили правильный по порядку величины результат (на что мы только и должны рассчитывать) в области достаточно малых частот. Качественный рекогносцировочный анализ физических явлений почти всегда можно сделать на уровне оценок. Рассмотрим показательный в этом отношении пример.

**Пример 15.** *Равновесное тепловое излучение.*

Пусть электромагнитное излучение заперто в полости нагретого до температуры  $T$  тела и находится с ним в равновесии. Нас будет интересовать энергия излучения в расчёте на единицу объема.

Будем рассматривать электромагнитное излучение в полости как фотонный газ. Единственным энергетическим параметром в задаче является температура. Поэтому энергия  $\hbar\omega$  кванта излучения – фотона – порядка  $kT$ . Здесь  $k$  – постоянная Больцмана,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\omega = 2\pi c/\lambda$  – частота,  $c$  – скорость света, а  $\lambda$  – длина волны. Так как в нашей задаче  $\lambda$  – единственная характерная величина с размерностью длины, то поэтому плотность фотонов

$$n \sim \lambda^{-3} \sim \left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3,$$

а их энергия в единице объема

$$U \sim nkT \sim \frac{k^4 T^4}{(c\hbar)^3}.$$

Это с точностью  $\pi^2/15 \approx 2/3$  – закон Стефана-Больцмана.

#### 1.4. Исследование с помощью асимптотик

Сейчас мы рассмотрим другие приёмы в исследовательской работе. Часто бывает так, что по поведению изучаемой величины при малых и больших значениях безразмерного параметра можно понять, как ведёт себя физическая величина при промежуточных значениях аргумента. Хорошей иллюстрацией этого правила является следующий пример.

**Пример 16.** *Замедление нейтронов.*

Пусть частица массы  $m_1$  налетает на покоящуюся мишень, масса атомов которой равна  $m_2$ . Частицей-снарядом может быть нейтрон, а мишенью – ядро атома вещества замедлителя. Попробуем понять, как зависит от отношения масс  $m_1/m_2 = x$  относительная энергия  $\delta E/E$ , которую теряет при ударе первая частица.

При  $m_1 \ll m_2$  ( $x \ll 1$ ) частица отскакивает от более массивной мишени, практически не передавая ей своей энергии и не теряя своей. Поэтому при  $x \rightarrow 0$   $\delta E/E = 0$ . Если  $m_1 \gg m_2$  ( $x \gg 1$ ), то массивный снаряд сметает мишень, не теряя заметной энергии. Таким образом, и при  $x \rightarrow \infty$   $\delta E/E \rightarrow 0$ . Это значит, что существует такое значение  $x$ , при котором относительная потеря энергии  $\delta E/E$  максимальна. Из симметрии системы снаряд-мишень относительно перестановки движущейся и покоящейся частицы (индексов 1 и 2) следует, что  $x$  не только порядка единицы, но  $x$  точно равно единице и при  $x = 1$   $\delta E/E = 1$ . Высказанные соображения позволяют представить зависимость  $\delta E/E$  от  $x$  так, как это показано на рисунке (см. Рис. 1).

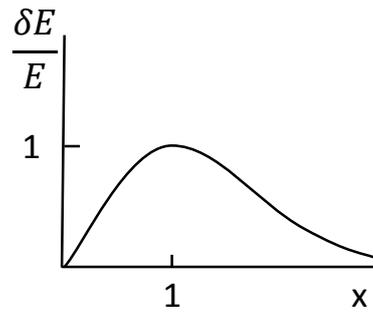


Рис. 1: Зависимость относительной энергии  $\delta E/E$ , теряемой частицей при столкновении с мишенью, от отношения масс  $x = m_1/m_2$  частицы ( $m_1$ ) и мишени ( $m_2$ ).

Из рисунка видно, что для того, чтобы замедлить нейтроны – отобрать у них максимально возможную часть энергии – необходимы столкновения их с ядрами атомов как можно более близкой массы. Лучше всего с ядрами атомов водорода. Поэтому для защиты от нейтронов в ядерных установках используются водородосодержащие вещества.

Приведённые соображения позволяют понять одну из трудностей осуществления управляемой термоядерной реакции. Для того, чтобы термоядерный синтез был возможен, необходимо дейтерий-тритиевую плазму, которая содержит ионы дейтерия и трития, а также электроны, нагреть до температуры  $10^8 \div 10^9$  °K. Эту энергию должны иметь ионы дейтерия и трития. Самый простой способ увеличения энергии заряженных частиц – воздействие на них электрического поля. (Электрическое поле совершает над частицами работу  $qEl$ , где  $q$  – заряд,  $E$  – напряженность поля,  $l$  – длина свободного пробега носителей заряда). Но при этом практически вся энергия воспринимается электронами,

имеющими большую скорость  $v = \sqrt{\frac{2qEl}{m}}$  по сравнению с ионами ( $m_e \ll m_i$ ). В дальнейшем энергии электронов и ионов, благодаря столкновениям, должны выравниваться. Однако из-за большого отношения масс ( $x \sim 10^{-3}$ ) при каждом столкновении электрон передает иону очень маленькую энергию и поэтому время установления теплового равновесия очень велико – больше времени удержания плазмы.

В рассмотренной задаче по нулевым предельным значениям мы восстановили характер зависимости  $\delta E/E$  от  $x = m_1/m_2$  вплоть до точек экстремума. Однако асимптотик функции  $\delta E/E$  при  $x \ll 1$  и  $x \gg 1$  определить не удалось. Приведем пример, в котором качественные соображения позволяют определить вид функции при малых и больших значениях переменной.

**Пример 17.** *Электростатическое поле равномерно заряженного кольца.*

Рассмотрим равномерно заряженное кольцо радиуса  $R$  с зарядом  $q$  и поставим задачу определить характер зависимости вектора напряженности электрического поля, которое создается зарядом  $q$  на оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, в зависимости от расстояния от центра.

Пусть ось симметрии кольца совпадает с осью  $x$ , а начало оси  $x$  находится в центре кольца. При  $x = 0$  из принципа суперпозиции сразу же следует, что напряженность электрического поля равна нулю. На очень больших расстояниях поле также обращается в нуль. Так как с больших расстояний кольцо выглядит как точечный заряд, исчезновение поля при  $x \gg R$  происходит по закону  $E(x) = q/x^2$ . Между двумя минимумами, как известно, существует максимум, который достигается на расстояниях порядка радиуса кольца. Это следует из того, что радиус  $R$  является у нас единственной величиной с размерностью длины. Он и задаёт масштаб явления. Из размерностных соображений следует, что максимальное значение напряженности электрического поля порядка  $q/R^2$ .

Возрастание поля при  $x \ll R$  от нулевого происходит по линейному закону:  $E(x) = qx/R^2$ . Коэффициент пропорциональности в этой зависимости связан с размерностью напряженности, а линейность следует из того, что из-за векторного характера при замене  $x \rightarrow -x$  напряженность поля должна менять знак. Качественный вид зависимости  $E(x)$  совпадает с поведением относительной потери энергии из предыдущего примера и показан на рисунке.

Различие в асимптотическом поведении конкурирующих физических величин при малых и больших значениях параметров, при котором соревнующиеся величины сравниваются. Так можно, анализируя гравитационную неустойчивость, оценить масштаб и массу гравитационных конденсаций (галактик, скоплений галактик и т.д.) [8]. Обратимся к более простому примеру.

**Пример 18.** *О размере частиц, находящихся в равновесии в поле притяжения Солнца.*

Здесь мы обсудим лишь причину существования частиц такого размера, при котором возникает равновесие. На частицу в околосолнечном пространстве действует сила гравитационного притяжения к Солнцу  $F_m$  и сила светового давления  $F_g$ , которая гонит частицы от Солнца. Причем первая, пропорциональная массе частицы  $m = \rho V$  и, следовательно, объёму  $V$ , пропорциональна  $R^3$ . Здесь  $R$  — характерный размер частицы,  $\rho$  — плотность. Сила светового давления, связанная с отражением электромагнитных волн, пропорциональна площади поперечного сечения частицы, то есть  $R^2$ . Изобразим эти зависимости на рисунке.

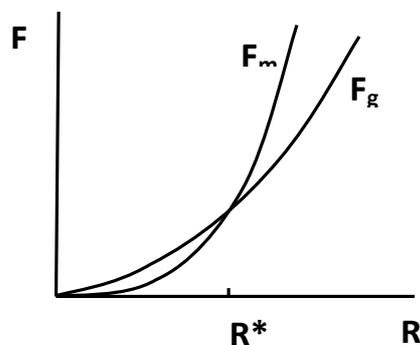


Рис. 2: Зависимость сил гравитационного притяжения  $F_m$  и светового давления  $F_g$  от размера частиц  $R$ .

Из рисунка видно, что из-за более резкого изменения функции  $R^3$  по сравнению с  $R^2$  существует такой размер  $R^*$ , при котором сила гравитационного притяжения будет компенсировать силе светового давления. Маленькие частицы ( $R < R^*$ ) изгоняются из околосолнечного пространства силой светового давления  $F_g > F_m$ , а большие ( $R > R^*$ ) удерживает Солнце ( $F_m > F_g$ ).

Обратим внимание также на то, что в условии равновесия расстояние  $r$  от Солнца до частицы не входит. Это связано с одинаковой зависимостью сил от расстояния  $r$ . Сила гравитационного притяжения пропорциональна  $r^{-2}$ . Сила светового давления пропорциональна давлению электромагнитного излучения, то есть пропорциональна квадрату напряженности электромагнитного поля. Пропорциональность напряженности поля в сферической электромагнитной волне  $r^{-1}$  приводит в результате к зависимости  $r^{-2}$  от силы светового давления.

## 1.5. Законы сохранения

Использование законов сохранения в физических исследованиях позволяет относительно простыми средствами получить ряд важных результатов. Выводы, извлекаемые из законов сохранения в задачах фундаментальной и прикладной физики, могут быть основой для построения точных закономерностей или носить характер ограничений, запретов на возможное поведение. Рассмотрим два типичных примера.

**Пример 19.** *Изменение площади поперечного сечения падающей струи воды.*

Будем считать, что ламинарная струя на некотором расстоянии от водопроводного крана имеет сечение с площадью  $S(x)$ . Как найти эту зависимость?

Воспользуемся законом сохранения массы жидкости. Масса воды, протекающая за промежуток времени  $dt$  расстояние  $vdt$  через сечения  $S$  и  $S_0$ , если нет дополнительного оттока, должна быть одинаковой. То есть

$$\rho S v dt = \rho S_0 v_0 dt,$$

или

$$Sv = S_0 v_0,$$

где  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость воды.

Пусть сечение  $S$  имеет координату  $x$ , а  $S_0$  — координату  $x_0$ . Тогда с использованием формулы  $v = \sqrt{v_0^2 + 2gx}$ , которая следует из закона сохранения энергии, закон сохранения массы примет вид

$$S(x) = S_0 \sqrt{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}}.$$

Таким образом, на большом расстоянии от крана площадь поперечного сечения струи воды уменьшается по закону  $x^{-1/2}$ .

**Пример 20.** *О невозможности рождения одного фотона при электрон-позитронной аннигиляции.*

Пусть электрон и позитрон, сталкиваясь, аннигилируют, рождая при этом некоторое число фотонов. Закон сохранения заряда в реакции оказывается выполненным, так как фотон электрически нейтрален. Почему число возникающих фотонов всегда больше единицы?

В этой задаче ограничение снизу на число фотонов накладывает закон сохранения импульса. Рассмотрим электрон-позитронное столкновение в системе центра инерции, где по определению суммарный импульс системы до столкновения равен нулю. Нулевым он должен остаться и после столкновения. Это противоречит ненулевому импульсу системы в случае рождения одного фотона.

Рассматривая обратную реакцию, можно сделать вывод, что один фотон не сможет и родить электрон-позитронную пару, поскольку при этом не выполняется закон сохранения импульса. Для осуществления процесса необходимо внешнее поле, например, поле ядра. В этом случае из-за пространственной неоднородности системы импульс не сохраняется и ограничение на число фотонов отсутствует.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ценность первого из рассмотренных нами качественных методов – анализа размерностей – состоит в том, что он может быть полезным в качестве рабочего инструмента в самых разнообразных областях: для восстановления забытых формул, проверки уравнений, преобразования единиц размерностей, для исключения излишних и выбора решающих экспериментов, для извлечения максимальной информации, связанной с естественными соотношениями, которые существуют между переменными нерешённой задачи.

В определённой степени метод размерностей производит поначалу впечатление чуда, позволяя получить очень многое из ничего. По мере привыкания и освоения метода это впечатление сменяется пониманием того, что уже на первом этапе, при выписывании существенных параметров, мы должны ясно представлять себе физику явления. Поэтому ценным дополнением к методу служит знание фундаментальных законов, интуиция и приобретённый при решении типовых задач опыт.

Специалисты, потратившие много времени на решение своей проблемы, часто бывают обескуражены, когда узнают, что выстраданный результат следует из теории размерностей. («Как же я не догадался об этом раньше?») Поэтому здесь, обсуждая начальную стадию работы, мы старались по возможности показать механизм подхода к поставленным задачам. С подробностями можно познакомиться по книгам [6,8-14]. Детальное изучение анализа размерностей может быть ещё одним поводом к обсуждению тех или иных физических закономерностей.

Тема использования в исследовательской работе профессиональных приемов обширна, а число примеров велико. Совершенно очевидно, что мы лишь коснулись этой области. Из-за недостатка места некоторые специфические приемы, которыми пользуется специалист в своей работе, здесь не обсуждались. Например, совсем не рассматривался метод аналогий, имеющий богатую историю и широкое поле приложений (см. например [15]). Его «недостаток» состоит в том, что каких-либо советов или рецептов по применению этого метода дать, по-видимому, нельзя.

Возможно, что мы совершенно напрасно ограничивали себя обсуждением вопросов, относящихся к прикладной физике. Чтение дополнительной литературы [16-19] поможет восполнить этот пробел. Обзор качественных методов в физических исследованиях завершим замечанием, принадлежащим А.Б. Мигдалу [18]: «Обычная ошибка начинающих – это желание сразу понимать всё до конца. В действительности понимание возникает постепенно по мере привыкания к новым понятиям. Одна из трудностей научной работы состоит в том, что нельзя продвигаться вперёд без ясного понимания, но понимание возникает только в результате работы».

В заключение выражаем глубокую благодарность всем, с кем мы обсуждали вопросы, затронутые в этом методическом пособии, за полезные советы и замечания.

## ЗАДАЧИ

В приведенных ниже задачах некоторые необходимые для решения параметры не указаны. Определив сначала существенные величины, недостающие параметры нужно ввести самостоятельно.

1. Найти скорость капиллярных волн в тонком слое жидкости.
2. Оценить скорость распространения волн с длиной волны  $\lambda$  на поверхности лужи глубины  $h$  при условии  $h \ll \lambda$ . Чем отличается скорость волн на поверхности лужи от скорости волн на поверхности глубокого озера?
3. Определить радиус разрушения при сильном точечном взрыве внутри сплошного тела (модель землетрясения).
4. Найти период пульсации газового пузыря, образовавшегося при глубинном подводном точечном взрыве.
5. Оценить из соображений размерности время установления стационарного тока в цепи, индуктивность которой равна  $L$ , а сопротивление  $R$ .
6. Задав интенсивность звуковой волны, распространяющейся в кристаллическом стержне, оценить максимальное смещение атомов, вызванное звуковой волной.
7. Получить из соображений размерности формулу для характерной атомной частоты.
8. Сравнить кинетическую энергию нуклона в атомном ядре с кинетической энергией молекулы газа при комнатной температуре.
9. Оценить из соображений размерности избыточное давление газа в мыльном пузыре.
10. Найти высоту поднятия жидкости в капиллярной трубке.
11.  $U$  – образная трубка наполнена ртутью до высоты  $h$ . Найти период колебаний столба ртути, выведенного из положения равновесия.
12. Определить энергию системы водяных волн между двумя плоскостями, находящимися на расстоянии 1 см и параллельными направлению движения волн.
13. Найти массовый расход вязкой жидкости, протекающей через трубу круглого поперечного сечения.

14. Оцените, какой энергии хватит, чтобы разрушить атом, «отодрав» от него все электроны.
15. Найти численно величину дрейфовой скорости электрона в металлическом стержне длиной 1 м, если к нему приложено напряжение 300 В, а длина свободного пробега электронов порядка  $10^{-4}$  см.
16. Написать уравнение движения заряда в  $RC$ - контуре и подобно тому, как это сделано в примере 7, определить время релаксации заряда.
17. Учитывая, что теплота плавления есть, по существу, характерная энергия, необходимая для разрушения кристаллической решётки, оцените, какова должна быть температура в центре планеты, построенной целиком из ионного кристалла и не имеющей жидкого ядра.
18. Сравните плотность энергии максимально достижимых с помощью соленоидов магнитных полей, значения упругих модулей и теплоты плавления какого-нибудь металла. Какие выводы из такого сравнения можно сделать?
19. Оцените, насколько межатомные расстояния в нижней части вертикально стоящей металлической колонны меньше, чем в верхней. Высота колонны 20 м.
20. Какие существуют принципиальные ограничения на минимальное возможное время разряда батареи конденсаторов через соленоид? Связано ли это время с вычисленным нами в примере 14 временем диффузии магнитного поля? Что в этом случае является характерным размером? Разберитесь вопрос об исчезновении магнитного поля внутри соленоида, по обмотке которого шёл постоянный ток, если ток внезапно выключить.
21. Мы рассмотрели в примере 12 вопрос о максимально возможной высоте гор на планете. Существует ли максимально допустимая глубина шахты, которую можно выкопать на Земле? Если да, то оцените, какова эта глубина.
22. Оцените объем разрушений внутри сплошной кристаллической среды, если источником разрушений является полный развал одного атомного ядра. Если допустить, что такой развал возможен, можно ли рассматривать его как сильный точечный взрыв?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пайерлс Р. Построение физических моделей. // УФН – 1983 – Т.140 – С.315.
2. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.
3. Брук Ю.М., Стасенко А.Л. О современной физике – учителю. – М.: Знание, 1975.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1972.
5. Хантли Г. Анализ размерностей. – М.: Мир, 1970.
6. Бриджмен П.В. Анализ размерностей. – Л.-М.: ОНТИ-ГТТИ, 1934.
7. Вайскопф В. Современная физика в элементарном изложении. // УФН – 1971 – Т.103 – № 1
8. Дибай Э.А., Каплан С.А. Размерности и подобие астрофизических величин. – М.:Наука, 1976.
9. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Л.: Гидрометеиздат, 1978.
10. Гуревич В., Волмен Г. Теория размерностей. – М.: ИЛ, 1948.
11. Коган Б.Ю. Размерность физической величины. – М.: Наука, 1968.
12. Клайн С.Д. Подобие приближенного метода. – М.: Мир, 1968.
13. Курт Р. Анализ размерностей в астрофизике. – М.: Мир, 1975.
14. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1977.
15. Гегузин Я.Е. Капля. – М.: Наука, 1977.
16. Гинзбург В.Л. О физике и астрофизике. – М.: Наука, 1974.
17. Гуревич Л.Э., Чернин А.Д. Общая теория относительности в физической картине мира. – М.: Знание, 1970.
18. Мигдал А.Б. Качественные методы в квантовой теории. – М.: Наука, 1975.
19. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений. – М.: Наука, 1966.